Planimetrie

Kruhová inverze a Apollóniovy úlohy

1. DÚ Je dána řídicí kružnice $z(S,r)$, kružnice $n(N,r_n)$, která je uvnitř z a $S \in n$ a kružnice $m(M,r_m)$, která má vnější dotyk s kružnicí n. Sestrojte obrazy kružnic m,n v kruhové inverzi.

2. DÚ Je dán $\triangle ABC$.

   (a) Sestrojte jeho obraz v kruhové inverzi, kde řídicí kružnice, je kružnice trojúhelníku vepsaná.

   (b) Sestrojte dále obraz kružnice opsané v dané kruhové inverzi.

   (c) Určete poloměry kružnic, které jsou obrazy přímek $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ a kružnice opsané $\triangle ABC$.

3. DÚ Stereografická projekce v rovině je zobrazení, ve kterém se z bodu na kružnici promítají body dané kružnice na nějakou přímku (neprocházející bodem promítání) v rovině.
   Nechť je dána řídicí kružnice $z(S,r)$ a přímka p procházející středem S. Krajní body průměru kružnice z kolmého k přímce p označme A,B. Na kružnici zvolme libovolný bod $P_0 \neq A,B$ a sestrojme jeho obrazy P,P' v stereografických projekcích kružnice z z bodů A,B na přímku p. Dokažte, že body P,P' tvoří odpovídající si pár v kruhové inverzi s řídicí kružnicí z.

4. Je dána řídicí kružnice $z(S,r)$. Pro libovolný bod $X \neq S, x \notin z$ a jeho obraz X' v kruhové inverzi podle z určete dvojpoměr $(A,B;X,X')$, kde body A a B jsou průsečíky přímky $\overleftrightarrow{XX'}$ a kružnice z.
   Pozn. pozor na orientaci v definici dvojpoměru.

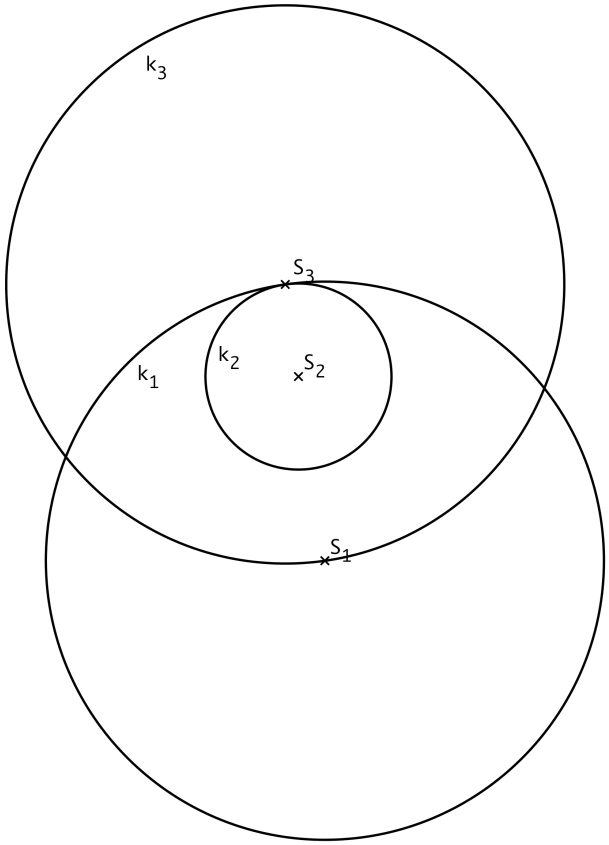
5. Jsou dány soustředné kružnice k_1 a k_2. Diskutujte vzájemné vztahy obrazů těchto kružnic při různých volbách kruhové inverze.

6. DÚ Řešte Apolloniovu úlohu Bpp, t.j. najděte kruhový útvar dotýkající se přímek $p,q, p \nparallel q$ a procházející bodem $A, A \notin p,q$. Konstrukci odůvodněte v rozboru a udělejte diskuzi vzhledem k zadaným parametrům.

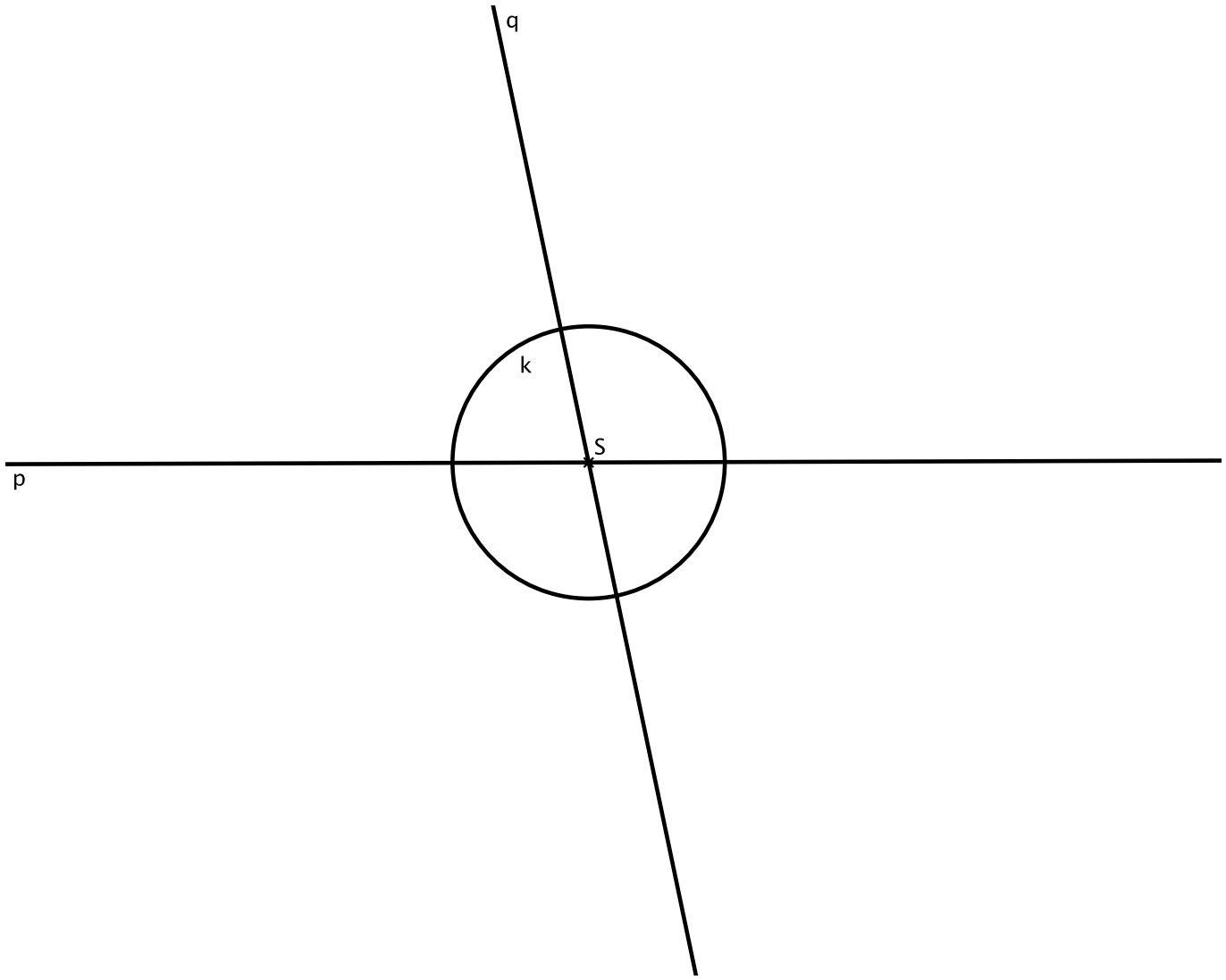
7. Řešte Apolloniovu úlohu BBk pro body A,B a kružnici $k(S,r)$. Určete počet řešení vzhledem k vzájemným polohám objektů. Pro volbu bodů A,B uvnitř kruhu k udělejte náčrt a rozbor s hlavními body konstrukce a proveďte konstrukci.

8. Vyřešte Apolloniovu úlohu pkk, t.j. najděte kruhový útvar dotýkající se přímky p a kružnic $k(S_k,r_k), l(S_l,r_l)$, pro $S_k \neq S_l; r_k = r_l$. Nápověda: využijte buď dilataci, nebo kruhovou inverzi. Konstrukci odůvodněte v rozboru a udělejte diskuzi vzhledem k zadaným parametrům.

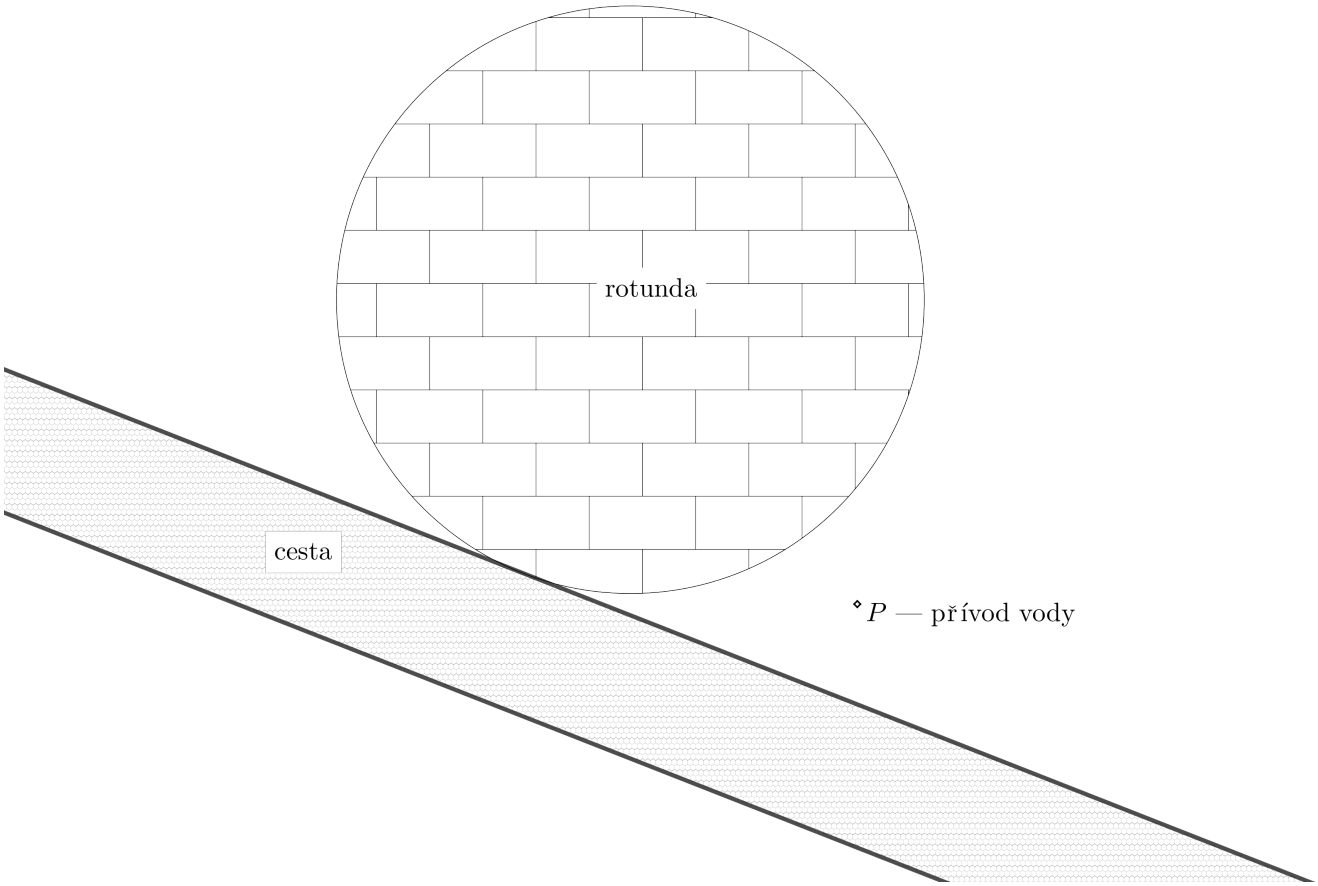
9. Řešte Apolloniovu úlohu kkk pro kružnice $k_1(S_1, r_1);\ k_2(S_2, r_2);\ k_3(S_3, r_3)$. Kružnice k_1 a k_2 mají vnitřní dotyk v bodě S_3.



10. Řešte Apolloniovu úlohu *ppk* pro přímky p, q a kružnici $k(S, r)$. Přímky p a q se protínají v bodě S.



Ↄ Na obrázku je plán parku v němž je rotunda s kruhovým půdorysem a rovný chodník, jež se rotundy okrajem dotýká. Doplňte do plánu nákres kruhového jezera, na jehož hranici leží bod přívodu vody (P) a dotýkajícího se okraje chodníku a půdorysu rotundy. Na vedlejší papír udělejte náčrt a rozbor s hlavními body konstrukce. Do zadání proveďte konstrukci všech řešení takových, aby rotunda neležela uvnitř jezera.



☽ Měsíc byl tu noc v úplňku. Mladý student geometrie dojížděl na zkoušku nočním vlakem. Po zopakování si všech typů Apolloniových úloh se podíval do okna svého kupé, ve kterém se obrys měsíce dotýkal spodního okraje okna a současně obou částečně odhrnutých závěsů tvořících kružnicové oblouky. Sestrojte všechny možnosti obrysu kruhového měsíce tak, aby ho bylo v okně celý vidět.
Na vedlejší papír udělejte náčrt a rozbor s hlavními body konstrukce.

