Planimetrie

Kružnice

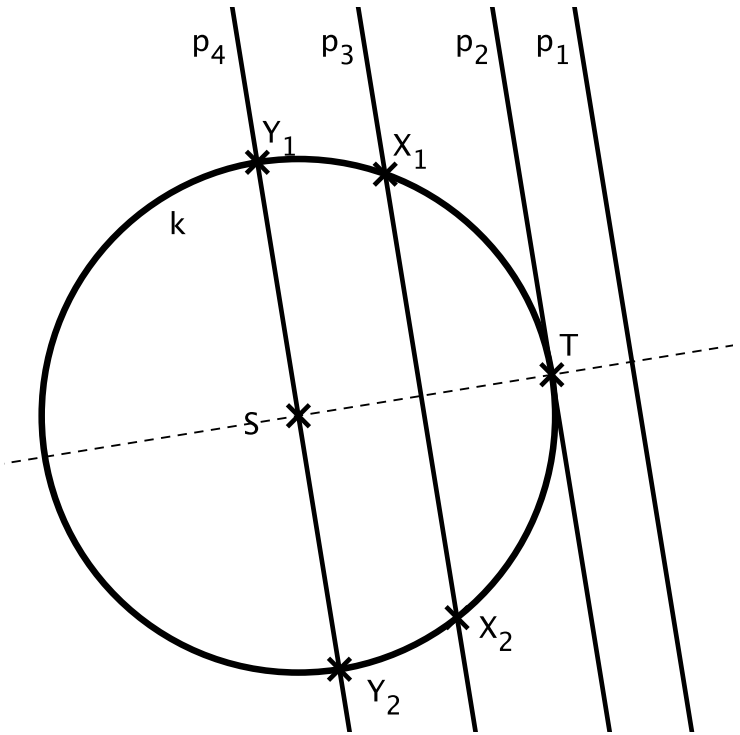
Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2025

www.zamboj.com

Vzájemná poloha přímky a kružnice



p_1 vnější přímka

p_2 tečna s bodem dotyku T

p_3 sečna

$\overline{X_1X_2}$ tětiva

$\overline{Y_1Y_2}$ průměr

$\overline{Y_1S}$ poloměr

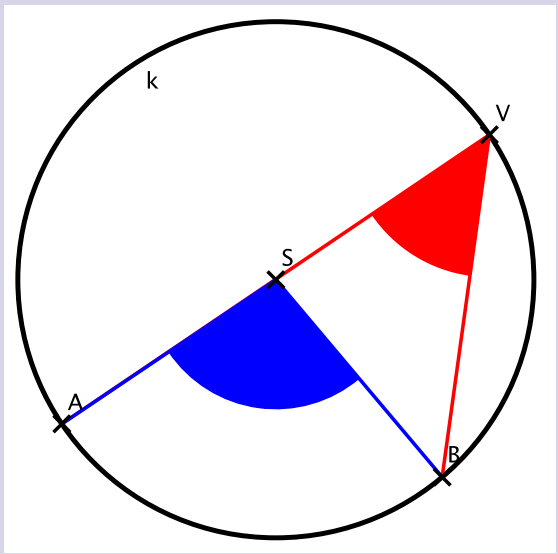
Úhly v kružnici

Věta (O obvodovém a středovém úhlu)

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti každého obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

Důkaz (Výčtem možností)

$\sphericalangle AVB$ - *obvodový úhel*
$\sphericalangle ASB$ - *středový úhel*



a) $S \in \overline{AV}$
$\triangle BSV$ - *rovnoramenný*
$|\sphericalangle SBV| = |\sphericalangle BVS| = \alpha$
$|\sphericalangle BSV| = \pi - 2\alpha$
$|\sphericalangle BSA| = 2\alpha$

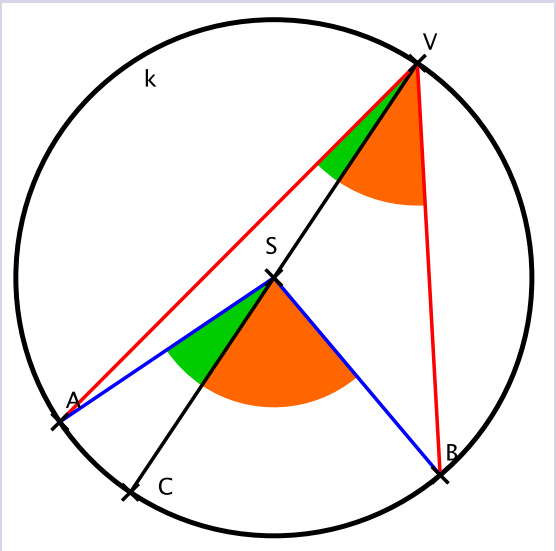
Úhly v kružnici

Věta (O obvodovém a středovém úhlu)

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti každého obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

Důkaz (Výčtem možností)

$\sphericalangle AVB$ - *obvodový úhel*
$\sphericalangle ASB$ - *středový úhel*



b) S je vnitřní bod konvex. úhlu $\sphericalangle AVB$
$C \in \overline{SV} \cap k$
převedeme na úhly $\sphericalangle AVC, \sphericalangle BVC$
$|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle AVC| + |\sphericalangle BVC|$

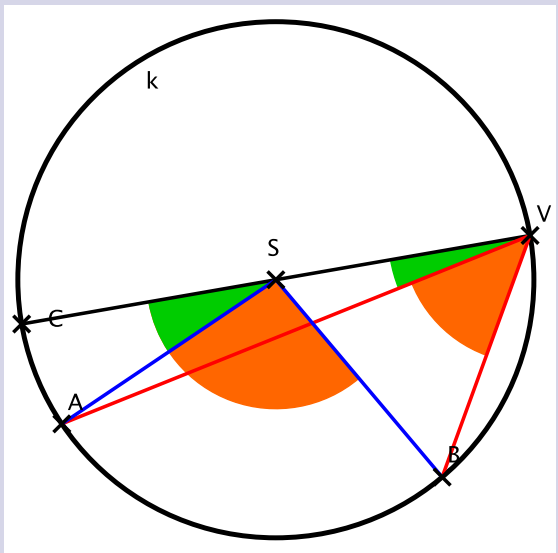
Úhly v kružnici

Věta (O obvodovém a středovém úhlu)

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti každého obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

Důkaz (Výčtem možností)

$\sphericalangle AVB$ - *obvodový úhel*
$\sphericalangle ASB$ - *středový úhel*



c) S je vnější bod konvex. úhlu $\sphericalangle AVB$
$C \in \overline{SV} \cap k$
převedeme na úhly $\sphericalangle AVC, \sphericalangle BVC$
$|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle BVC| - |\sphericalangle AVC|$

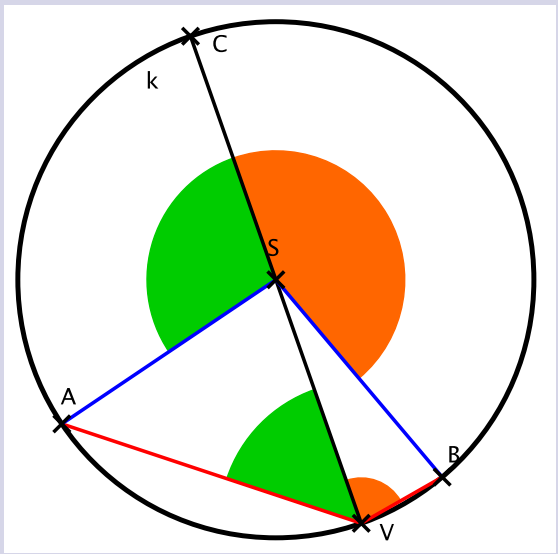
Úhly v kružnici

Věta (O obvodovém a středovém úhlu)

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti každého obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

Důkaz (Výčtem možností)

$\sphericalangle AVB$ - *obvodový úhel*
$\sphericalangle ASB$ - *středový úhel*



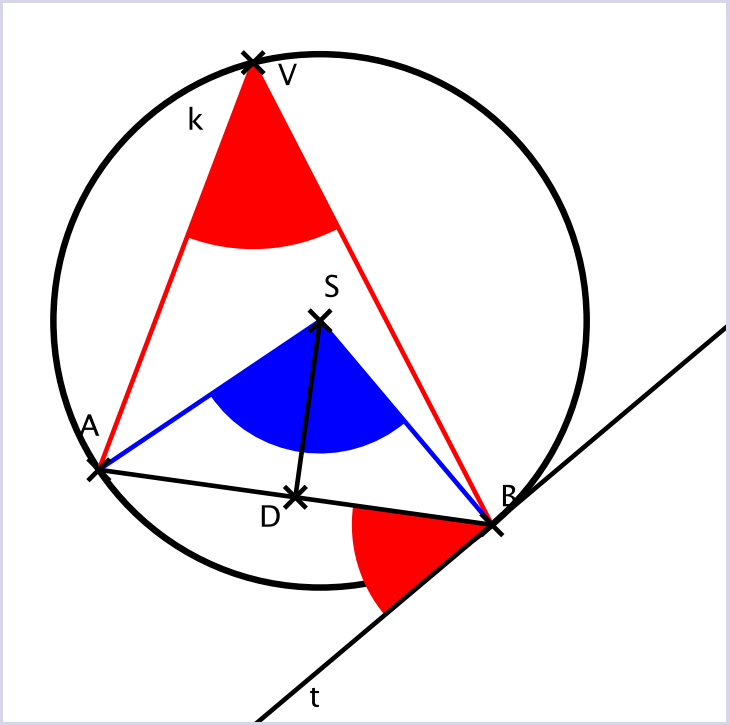
d) pro tupý $\sphericalangle AVB$
$C \in \overline{SV} \cap k$
převedeme na úhly
$\sphericalangle AVC, \sphericalangle BVC$
$|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle BVC| + |\sphericalangle AVC|$

Úhly v kružnici

Věta (O úsekovém úhlu)

Úsekový úhel daného oblouku je shodný se všemi obvodovými úhly příslušnými k danému oblouku,

Důkaz



$|\sphericalangle\overline{AB}, t|$ - *úsekový úhel*
$\triangle ABS$ *je rovnoramenný*
$\triangle DBS$ *je pravoúhlý*
$\overline{SD}$ *je osa úhlu* $\sphericalangle ASB$
$|\sphericalangle DSA| = |\sphericalangle DSB| = \alpha$
$|\sphericalangle DBS| = \frac{\pi}{2} - \alpha$
$|\sphericalangle\overline{AB}, t| = \alpha$

Úhly v kružnici

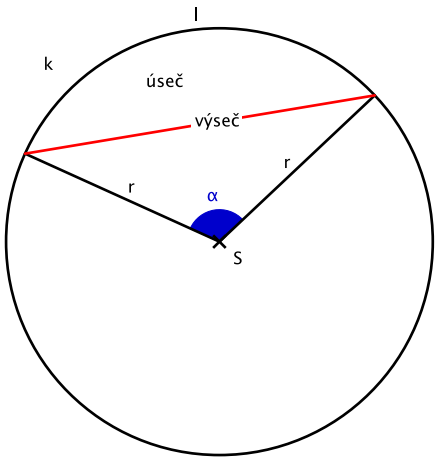
Aplikace:
množina $\mathcal{G}$ všech vrcholů V úhlu $\sphericalangle AVB$ o velikosti α, jejíchž ramena procházejí body $A \neq B$.

konstrukce tečny daným bodem

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892354201995611212902196086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778185778053217122680661300192787661119590921642019893809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899577362259941389124972177528347913151557485724245415069595082953311686172785588907509838175463746493931925506040092770167113900984882401285836160356370766010471018194295559619894676783744944825537977472684710404753464620804668425906949129331367702898915210475216205696602405803815019351125338243003558764024749647326391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503028618297455570674983850549458858692699569092721079750930295532116534498720275596023648066549911988183479775356636980742654252786255181841757467289097777279380008164706001614524919217321721477235014144197356854816136115735255213347574184946843852332390739414333454776241686251898356948556209921922218427255025425688767179049460165346680498862723279178608578438382796797668145410095388378636095068006422512520511739298489608412848862694560424196528502221066118630674427862203914945047123713786960956364371917287467764657573962413890865832645995813390478027590099465764078951269468398352595709825822620522489407726719478268482601476990902640136394437455305068203496252451749399651431429809190659250937221696461515709858387410597885959772975498930161753928468138268683868942774155991855925245953959431049972524680845987273644695848653836736222626099124608051243884390451244136549762780797715691435997700129616089441694868555848406353422072225828488648158456028506016842739452267467678895252138522549954666727823986456596116354886230577456498035593634568174324112515076069479451096596094025228879710893145669136867228748940560101503308617928680920874760917824938589009714909675985261365549781893129784821682998948722658804857564014270477555132379641451523746234364542858447952658678210511413547357395231134271661021359695362314429524849371871101457654035902799344037420073105785390621983874478084784896833214457138687519435064302184531910484810053706146806749192781911979399520614196634287544406437451237181921799983910159195618146751426912397489409071864942319615679452080951465502252316038819301420937621378559566389377870830390697920773467221825625996615014215030680384477345492026054146

Obvod a obsah

Obvod kružnice: $o = 2\pi r$
Obsah kružnice: $S = \pi r^2$



Délka oblouku kružnice: $l = \frac{\alpha}{2\pi} o = \frac{2\pi\alpha r}{2\pi} = \alpha r$

Obsah kruhové výseče: $S_{\text{výseče}} = \frac{\alpha}{2\pi} S = \frac{\pi\alpha r^2}{2\pi} = \frac{\alpha r^2}{2}$

Obsah kruhové úseče:

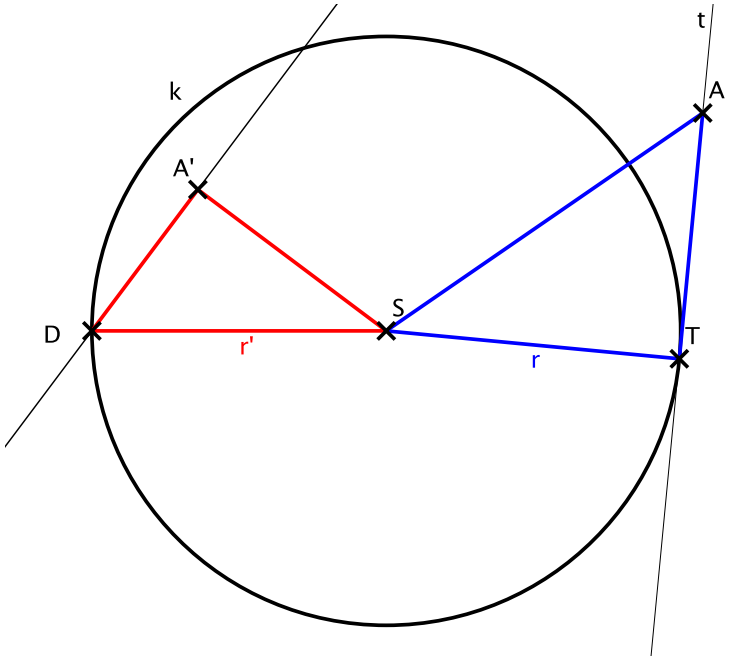
$$S_{\text{úseče}} = S_{\text{výseče}} - S_{\triangle} = \frac{\alpha r^2}{2} - \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin\alpha)$$

Mocnost bodu ke kružnici

Definice (Mocnost bodu ke kružnici)

Mocností bodu A ke kružnici $k(S, r)$ nazýváme číslo

$$M(A, k) = |AS|^2 - r^2.$$



$M(A, k) > 0 \Leftrightarrow A$ je vně k
$|AS|^2 - r^2 = |AT|^2 > 0$

$M(A, k) = 0 \Leftrightarrow A \in k$
$|AS|^2 - r^2 = 0$

$M(A, k) < 0 \Leftrightarrow A$ je uvnitř k
$|AS|^2 - r^2 = -|AD|^2 < 0$

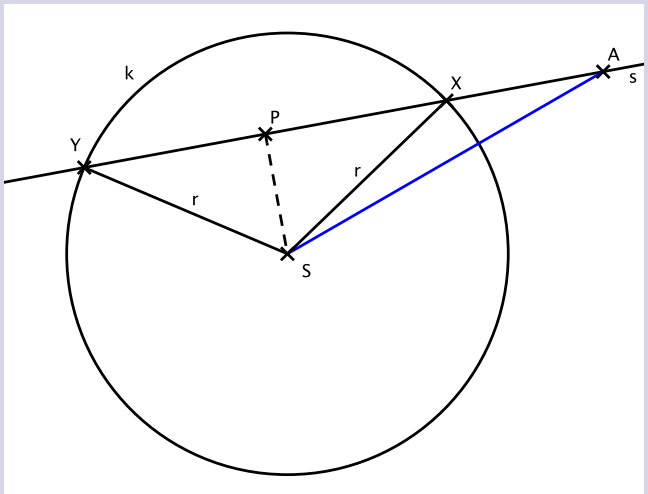
Mocnost bodu ke kružnici

Věta (Mocnost a sečna)

Je dána kružnice k a bod A. Bodem A veďme libovolnou sečnu s kružnice k. Průsečíky sečny s a kružnice k označme X, Y. Pro body X a Y platí:

$$|AX||AY| = \begin{cases} M(A,k) \text{ pokud } A \in k \text{ nebo } A \text{ je vně } k & (1) \\ -M(A,k) \text{ pokud } A \text{ je uvnitř } k & (2) \end{cases}$$

Důkaz



(1)

$$|AX||AY| = (|AP| - |XP|)(|AP| + |YP|)$$
$$|AX||AY| = |AP|^2 - |XP|^2$$
$$|AX||AY| = |AS|^2 - |SP|^2 - (r^2 - |SP|^2)$$
$$|AX||AY| = |AS|^2 - r^2 = M(A,k)$$

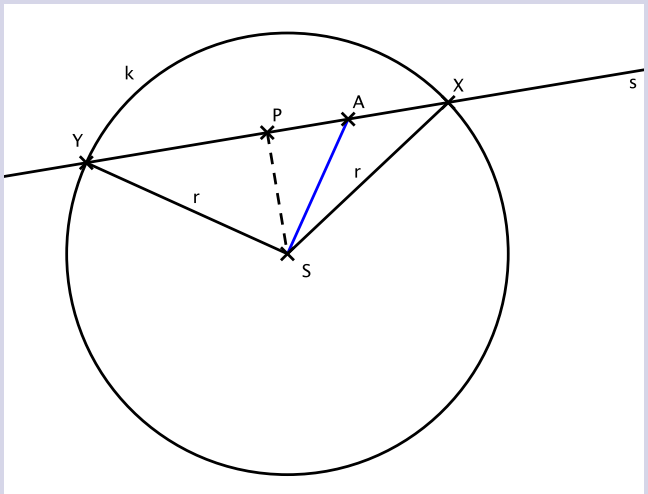
Mocnost bodu ke kružnici

Věta (Mocnost a sečna)

Je dána kružnice k a bod A. Bodem A veďme libovolnou sečnu s kružnice k. Průsečíky sečny s a kružnice k označme X, Y. Pro body X a Y platí:

$$|AX||AY| = \begin{cases} M(A,k) \text{ pokud } A \in k \text{ nebo } A \text{ je vně } k & (1) \\ -M(A,k) \text{ pokud } A \text{ je uvnitř } k & (2) \end{cases}$$

Důkaz



(2)

$$|AX||AY| = (|XP| - |AP|)(|AP| + |YP|)$$
$$|AX||AY| = |XP|^2 - |AP|^2$$
$$|AX||AY| = r^2 - |SP|^2 - (|AS|^2 - |SP|^2)$$
$$|AX||AY| = r^2 - |AS|^2 = -M(A,k)$$

Mocnost bodu ke kružnici

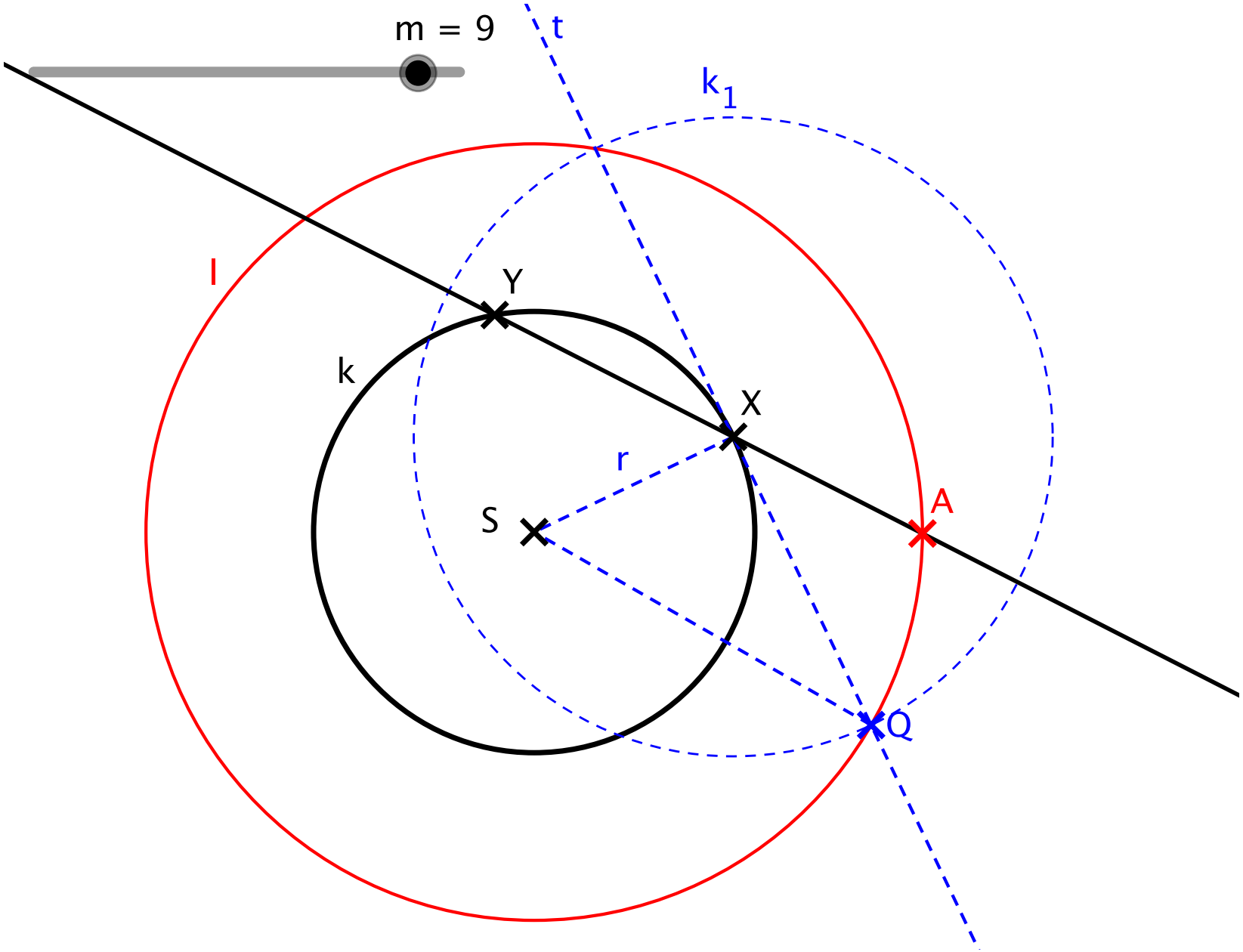
Konstrukce (Dáno: kružnice $k, X, Y \in k, M(A,k) > 0$. Sestrojte bod $A \in \overleftrightarrow{XY}$)

Pro $M(A,k) > 0$ platí $M(A,k) = |AS|^2 - r^2$
Bod A leží na $\overleftrightarrow{XY}$ a na kružnici $l(S, |AS| = \sqrt{M(A,k) + r^2})$.

Postup:

1. t; t je tečna ke k v bodě X
2. k_1; $k_1(X, \sqrt{M(A,k)})$
3. Q; $Q \in t \cap k_1$
4. l; $l(S, |SQ|)$
5. $A \in l \cap \overleftrightarrow{XY}$

Mocnost bodu ke kružnici



Mocnost bodu ke kružnici

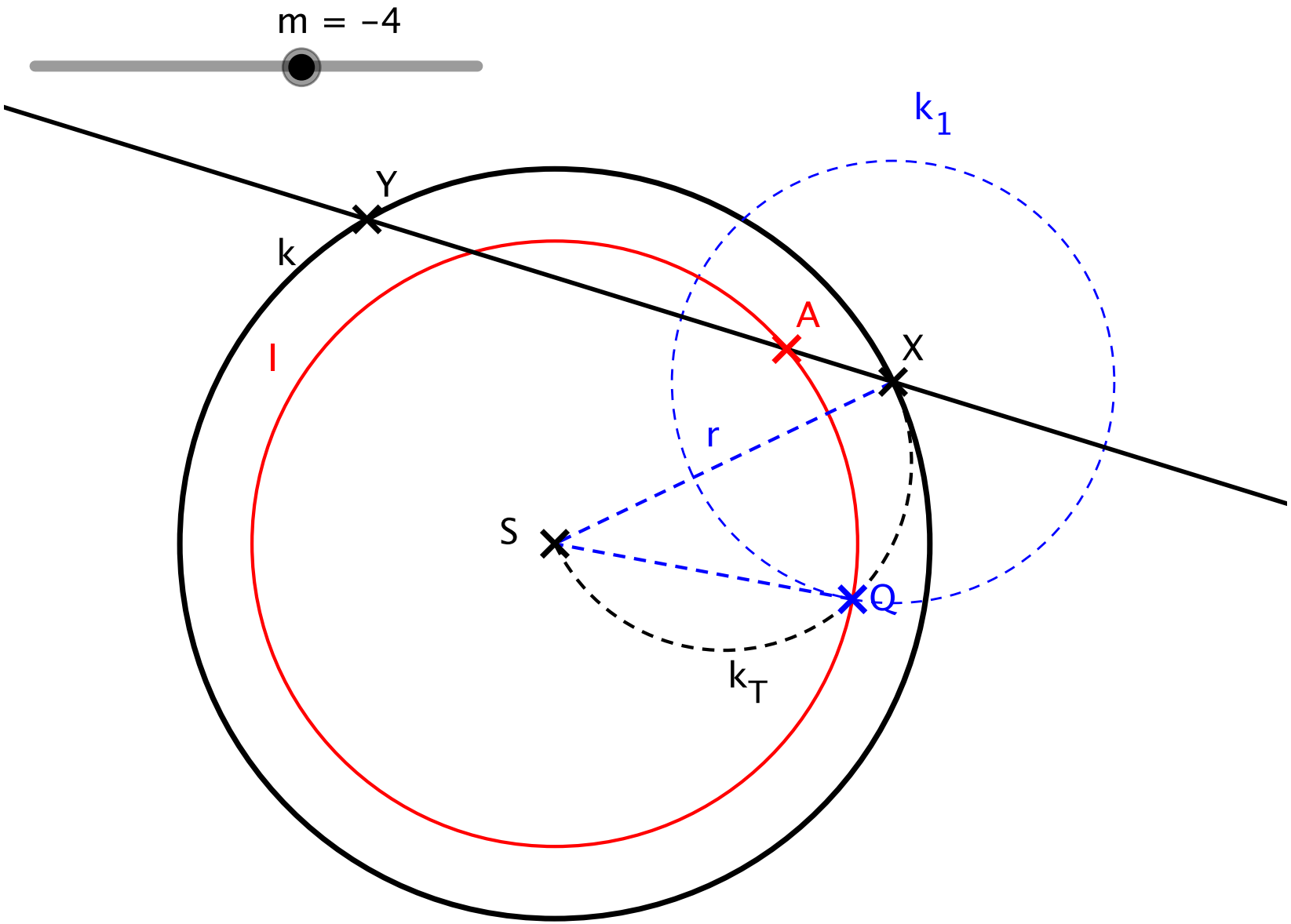
Konstrukce (Dáno: kružnice $k, X, Y \in k, M(A,k) < 0$. Sestrojte bod $A \in \overleftrightarrow{XY}$)

Pro $M(A,k) < 0$ platí $-M(A,k) = r^2 - |AS|^2$
Bod A leží na $\overleftrightarrow{XY}$ a na kružnici $l(S, |AS| = \sqrt{r^2 + M(A,k)})$.

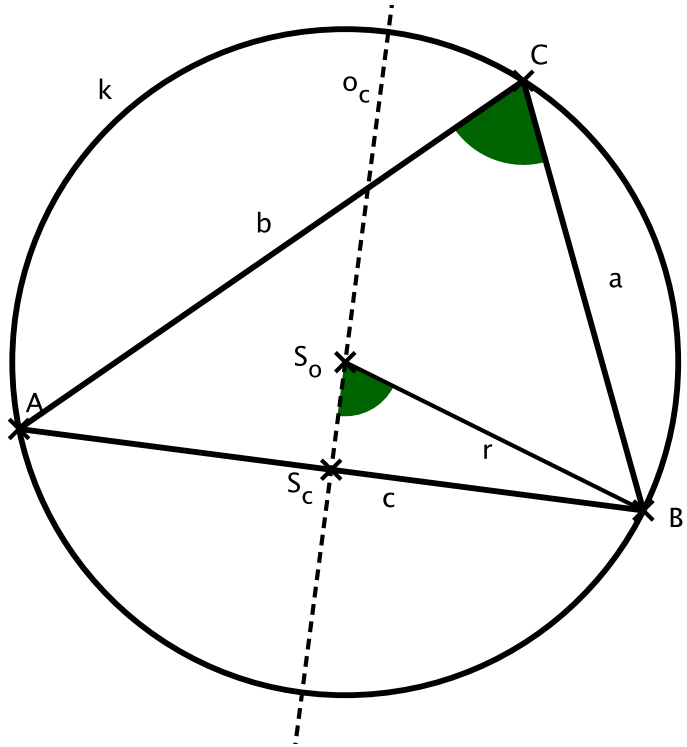
Postup:

1. $k_t; k_t(XS)$
2. $k_1; k_1(X, \sqrt{-M(A,k)})$
3. $Q; Q \in k_T \cap k_1$
4. $l; l(S, |SQ|)$
5. $A \in l \cap \overleftrightarrow{XY}$

Mocnost bodu ke kružnici



Kružnice opsaná $k(S_o, r)$



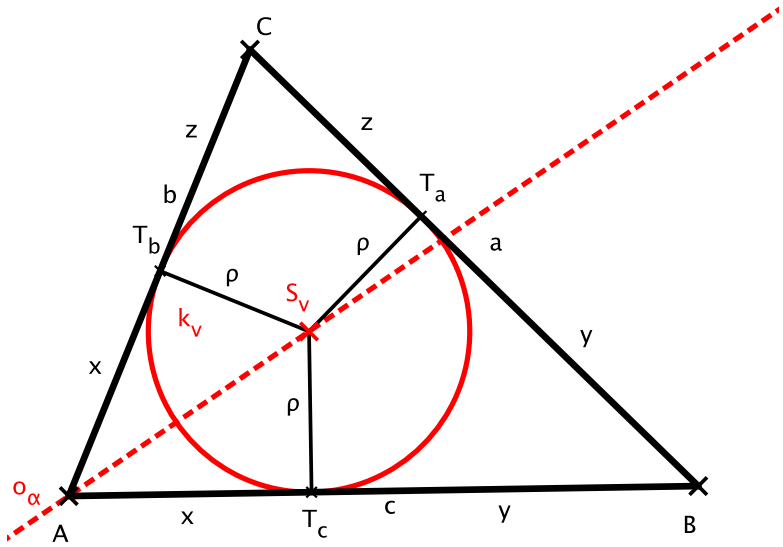
$$\triangle BS_oS_c \rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{2r}$$

$$2r = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$S_\triangle = \frac{abc}{4r}$$

Kružnice vepsaná $k(S_v, \rho)$

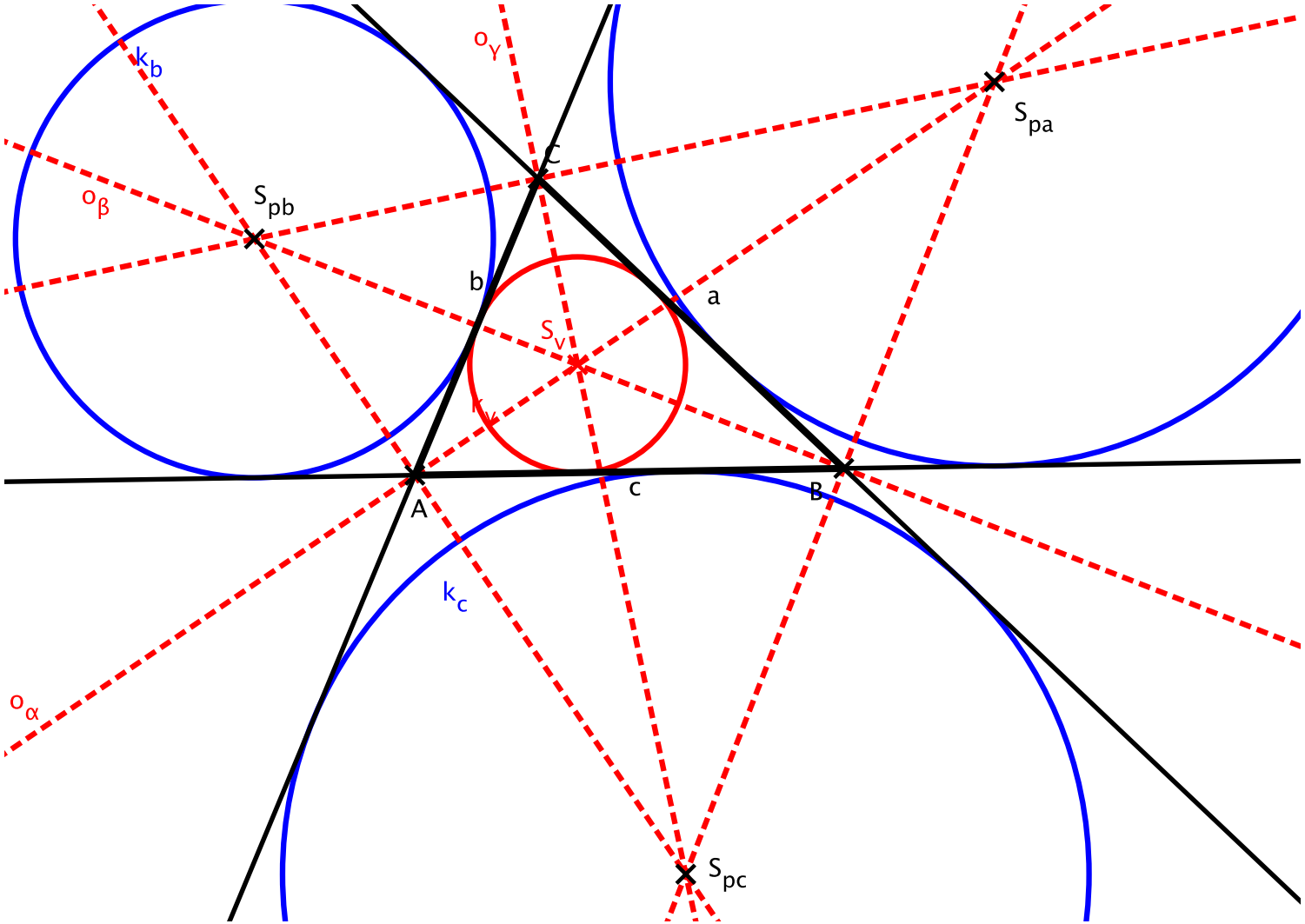


$$\rho = \frac{S_{ABC}}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\triangle AT_cS_v \cong AT_bS_v \text{ dle } Ssu\ (|AS_v|, \rho, \tfrac{\pi}{2})$$
$$\Rightarrow |AT_c| = |AT_b| = x$$
$$|BT_c| = |BT_a| = y$$
$$|CT_a| = |CT_b| = z$$
$$a + b + c = 2x + 2y + 2z$$
$$s = x + y + z$$
$$s - a = x$$
$$\rho = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

$$S_{ABC} = S_{ABS_v} + S_{BCS_v} + S_{ACS_v}$$
$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2}\rho c + \tfrac{1}{2}\rho a + \tfrac{1}{2}\rho b$$
$$S_{ABC} = \rho\tfrac{a+b+c}{2} = \rho s$$

Kružnice připsané k_a, k_b, k_c



Vzájemná poloha 2 ◯

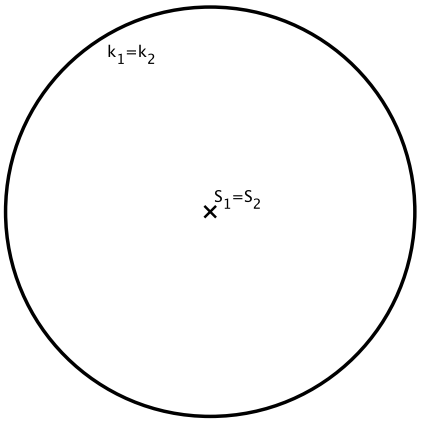
Definice (Soustředné kružnice)

Dvě kružnice se nazývají *soustředné* když mají společný střed.

Definice (Středná)

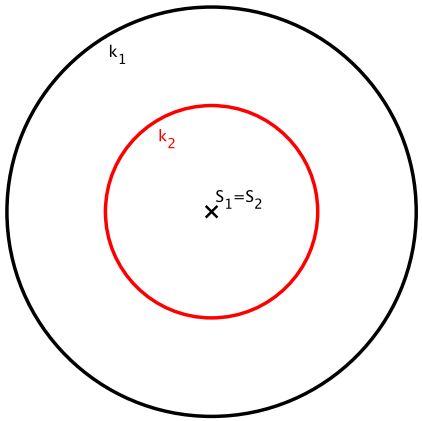
Spojnice středů dvou kružnic se nazývá jejich *středná*.

totožné



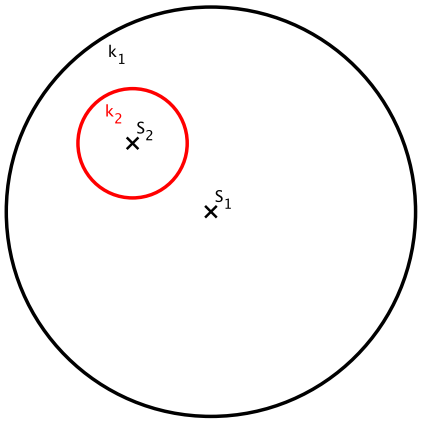
$S_1 = S_2$
$r_1 = r_2$

soustředné



$S_1 = S_2$
$r_1 \neq r_2$

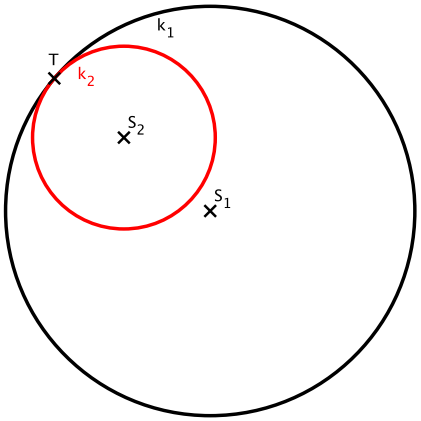
k_2 uvnitř k_1



$S_1 \neq S_2$
$|S_1S_2| < |r_1 - r_2|$

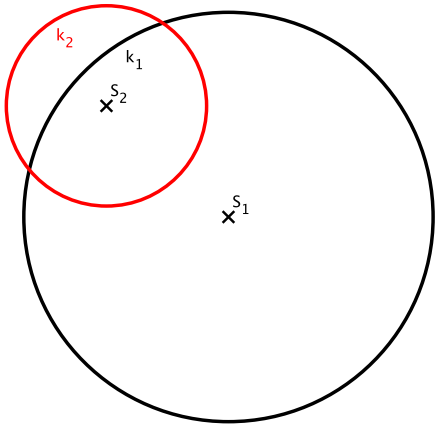
Vzájemná poloha 2 ◯

vnitřní dotyk



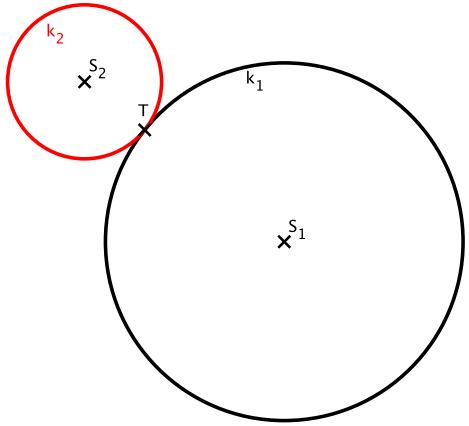
$S_1 \neq S_2$
$|S_1S_2| = |r_1 - r_2|$

k_1 a k_2 se protínají ve 2 bodech



$S_1 \neq S_2$
$|r_1 - r_2| < |S_1S_2| < r_1 + r_2$

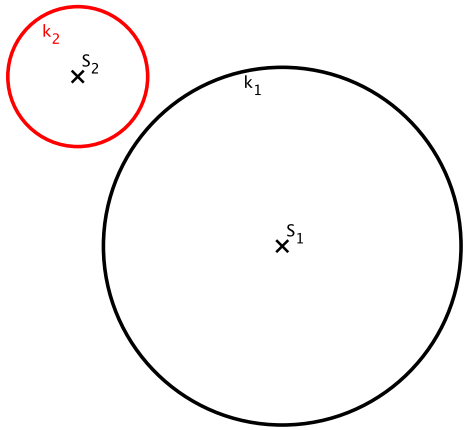
vnější dotyk



$S_1 \neq S_2$
$|S_1S_2| = r_1 + r_2$

Vzájemná poloha 2 ◯

k_1 a k_2 leží vzájemně vně

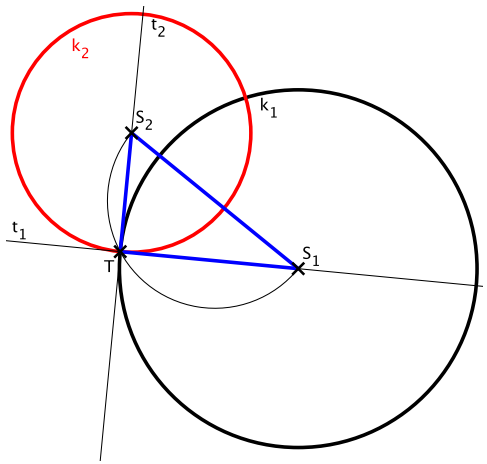


$$S_1 \neq S_2$$
$$|S_1 S_2| > r_1 + r_2$$

Vzájemná poloha 2 ◯

Definice (Ortogonální kružnice)

Dvě kružnice, které se protínají, se nazývají *vzájemně kolmé (ortogonální)*, jsou-li vzájemně kolmé jejich tečny ve společných průsečících.



$$S_1 \neq S_2$$
$$|S_1 S_2|^2 = r_1^2 + r_2^2$$

Stejnolehlost dvou kružnic

Věta (Stejnolehlost dvou kružnic)

Nechť jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$. Platí, že:

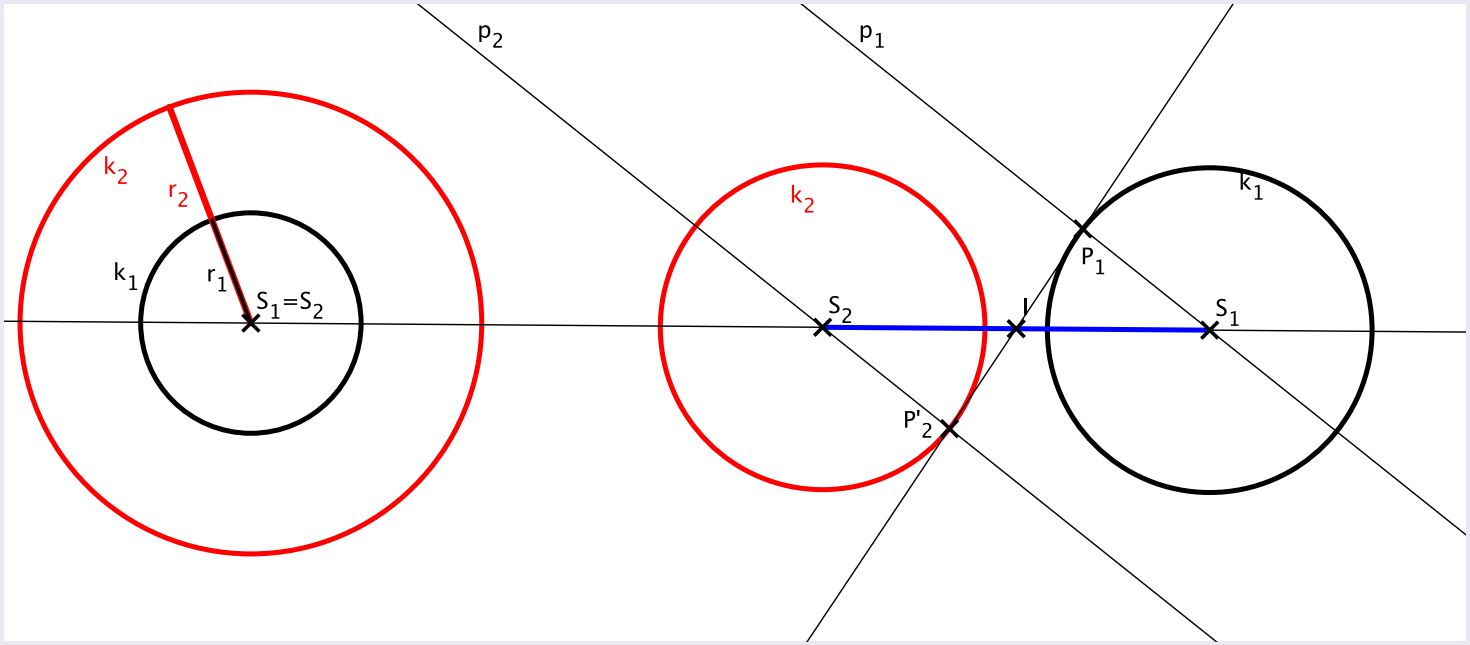
- *jsou-li k_1, k_2 soustředné, potom mezi nimi existují 2 stejnolehlosti s opačnými koeficienty.*
- *jsou-li $S_1 \neq S_2$ a současně $r_1 = r_2$, potom mezi nimi existuje 1 stejnolehlost (a 1 posunutí).*
- *jsou-li $S_1 \neq S_2$ a současně $r_1 \neq r_2$, potom mezi nimi existují 2 stejnolehlosti.*
  Vnitřní stejnolehlost se středem I na úsečce $\overline{S_1 S_2}$.
  Vnější stejnolehlost se středem E vně úsečky $\overline{S_1 S_2}$.

Stejnolehlost dvou kružnic

Věta (Stejnolehlost dvou kružnic)

$$S_1 = S_2 \rightarrow H(S_1, \frac{r_2}{r_1}), H(S_1, -\frac{r_2}{r_1})$$

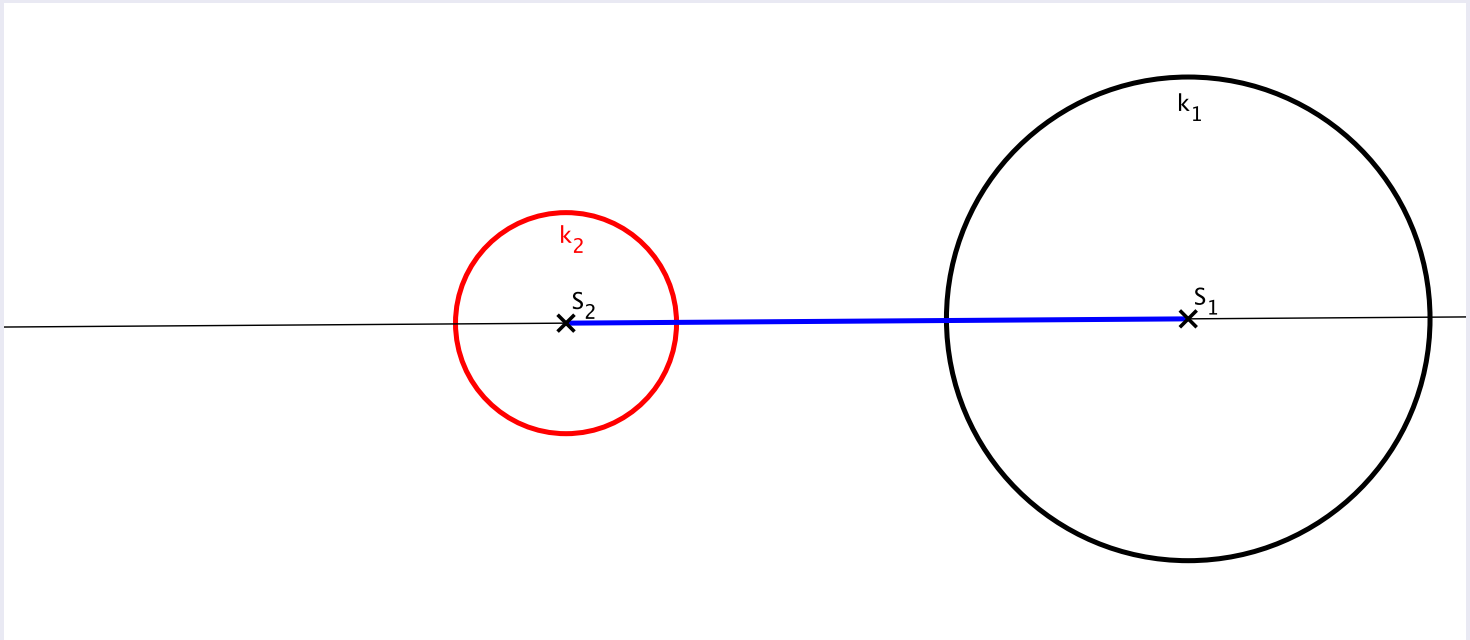
$$S_1 \neq S_2 \wedge r_1 = r_1 \rightarrow H(I(\text{střed}\overline{S_1 S_2}), -1)$$



Stejnolehlost dvou kružnic

Věta (Stejnolehlost dvou kružnic)

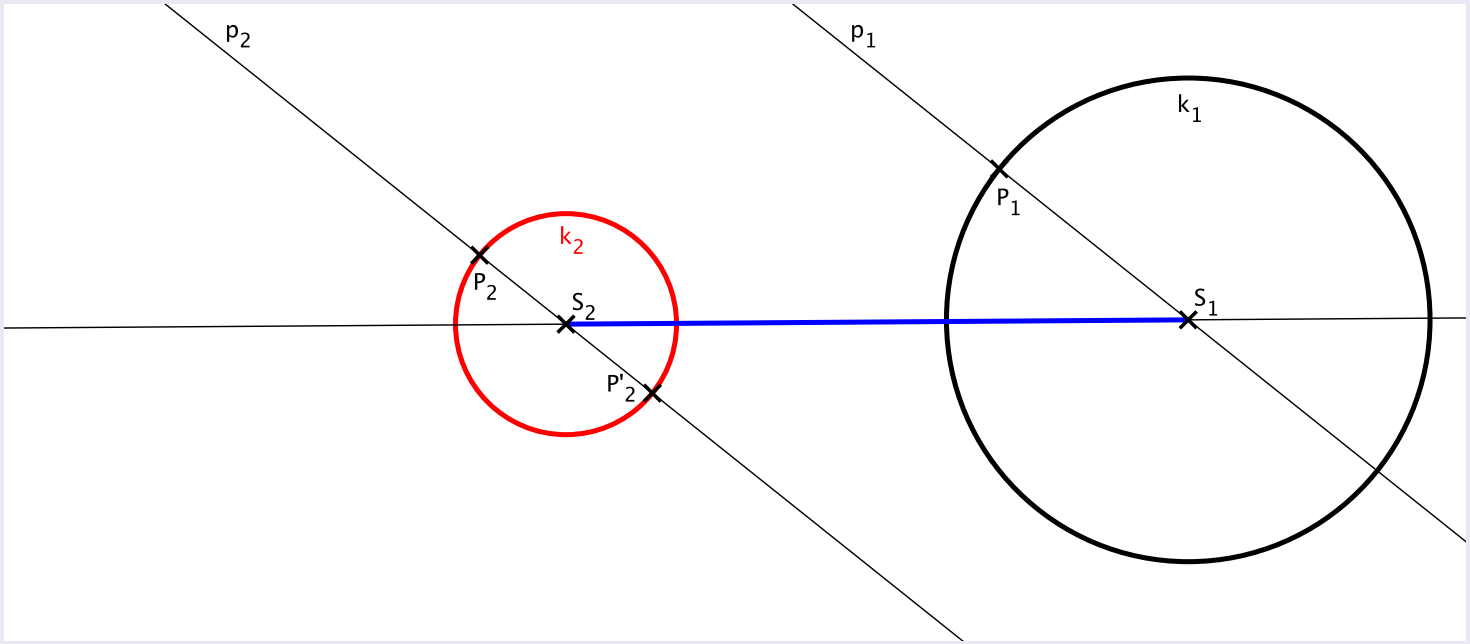
$$S_1 \neq S_2 \wedge r_1 \neq r_1$$



Stejnolehlost dvou kružnic

Věta (Stejnolehlost dvou kružnic)

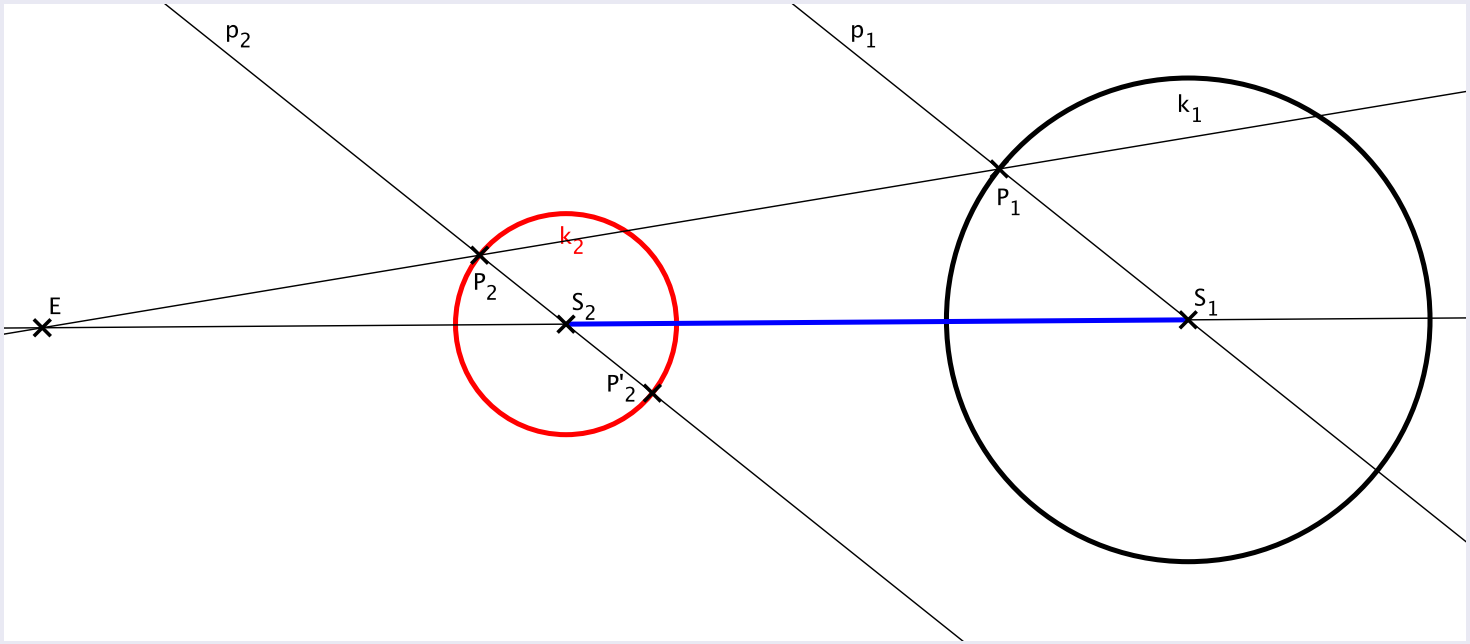
$$S_1 \neq S_2 \wedge r_1 \neq r_1$$



Stejnolehlost dvou kružnic

Věta (Stejnolehlost dvou kružnic)

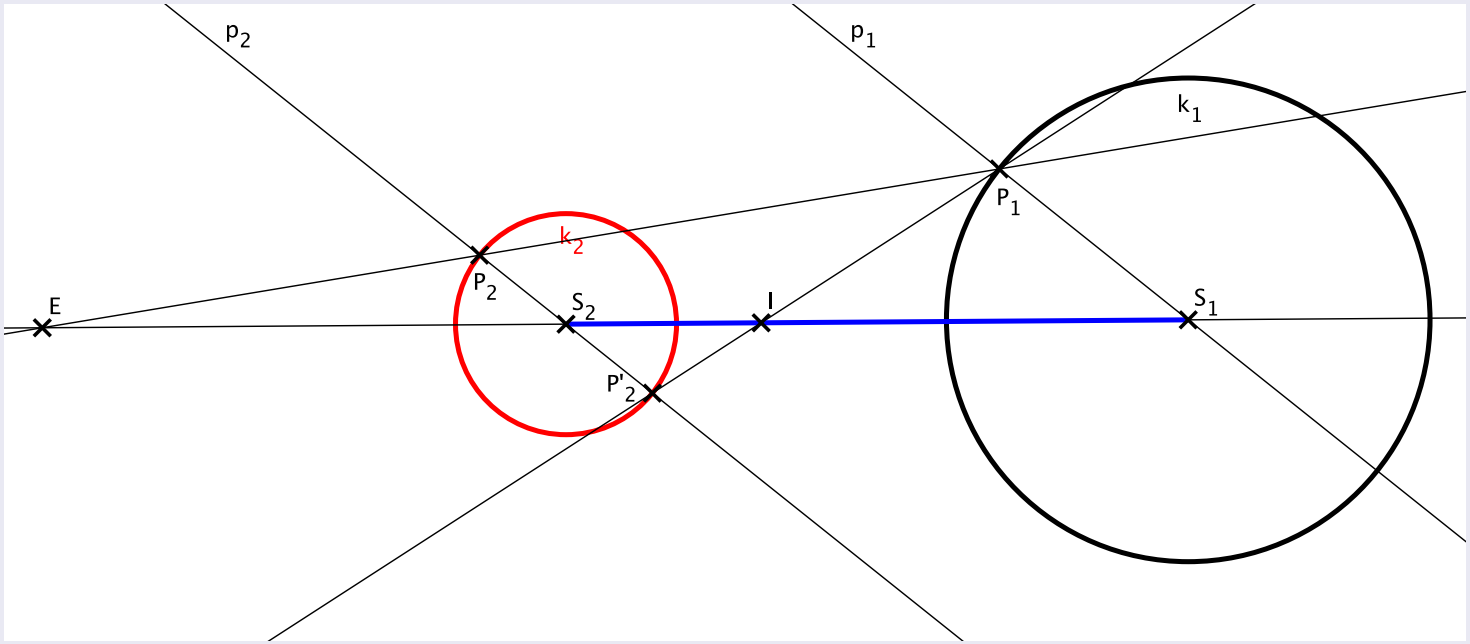
$$S_1 \neq S_2 \wedge r_1 \neq r_1$$



Stejnolehlost dvou kružnic

Věta (Stejnolehlost dvou kružnic)

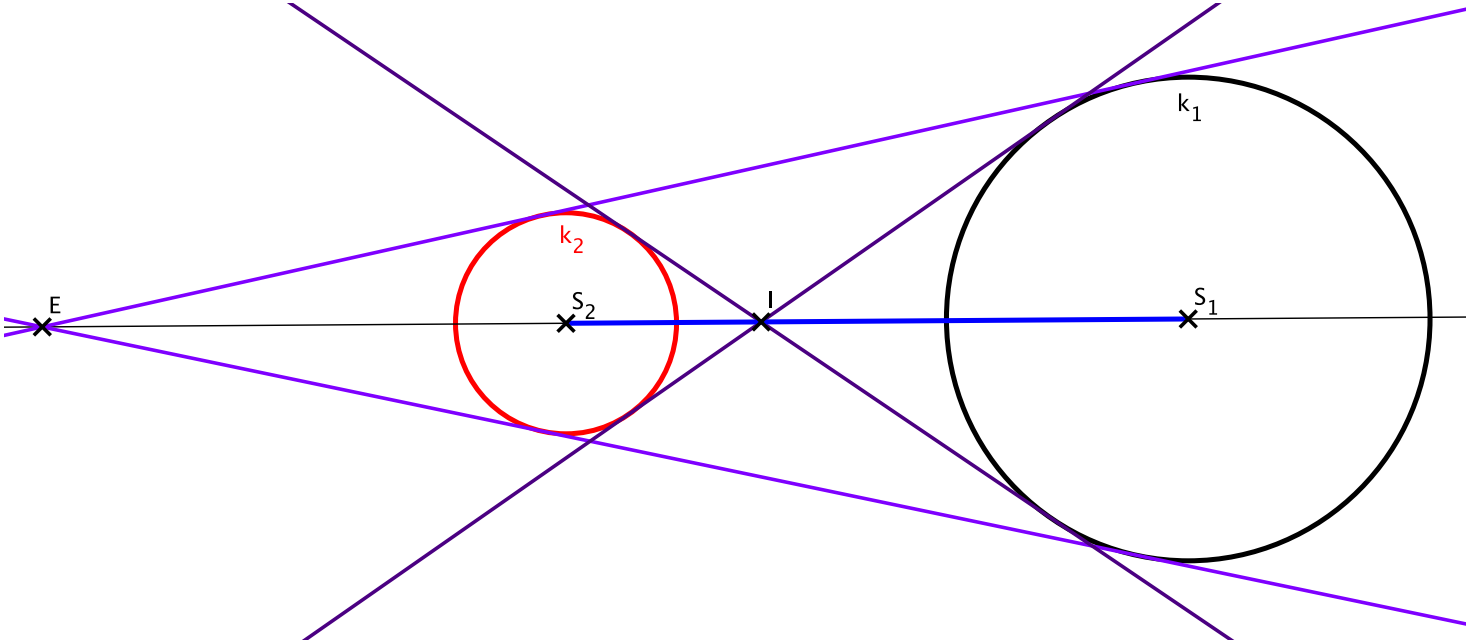
$$S_1 \neq S_2 \wedge r_1 \neq r_1$$



Stejnolehlost dvou kružnic

Aplikace: sestrojení tečen dvou kružnic.

$$S_1 \neq S_2 \wedge r_1 \neq r_1$$



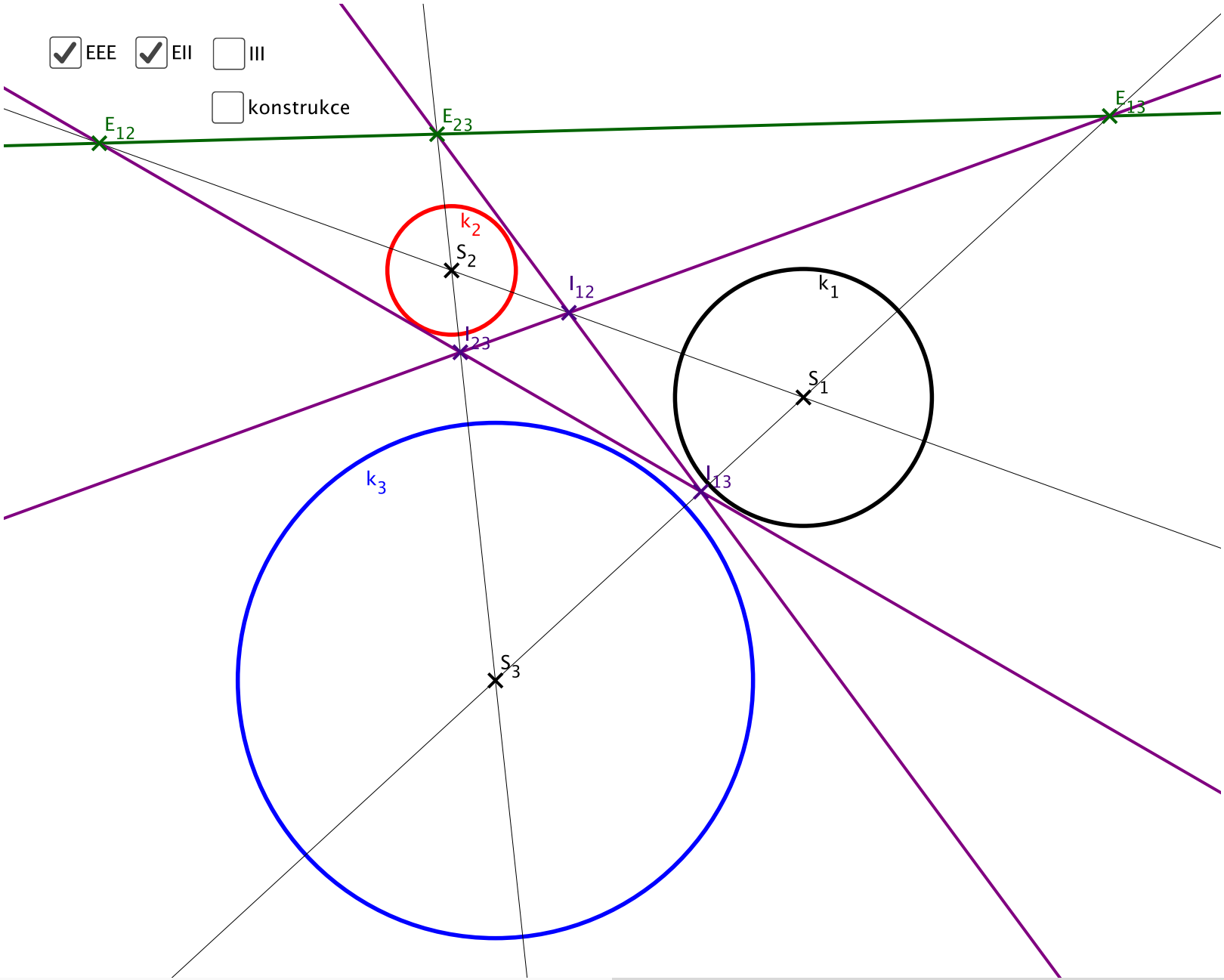
Mongeova věta

Věta (Mongeova věta)

Jsou-li k_1, k_2, k_3 kružnice s nekolineárními různými středy a různými poloměry, pak platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlosti každých dvou z těchto kružnic:

- *všechny 3 vnější středy stejnolehlosti (E_{12}, E_{23}, E_{13}) leží v přímce*
- *každé dva vniřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce*
- *3 vnitřní středy stejnolehlosti (I_{12}, I_{23}, I_{13}) neleží v přímce*

Mongeova věta



Mongeova věta

Věta (Mongeova věta)

Důkaz

Použijeme vlastnosti Mongeovy grupy

Vnější stejnolehlost mezi k_1 *a* k_2 *je* $H_{12}(E_{12}, \frac{r_2}{r_1})$.

Vnitřní stejnolehlost mezi k_1 *a* k_2 *je* $H'_{12}(I_{12}, -\frac{r_2}{r_1})$.

Vnější stejnolehlost mezi k_2 *a* k_3 *je* $H_{23}(E_{23}, \frac{r_3}{r_2})$.

Vnitřní stejnolehlost mezi k_2 *a* k_3 *je* $H'_{23}(I_{23}, -\frac{r_3}{r_2})$.

Vnější stejnolehlost mezi k_1 *a* k_3 *je* $H_{13}(E_{13}, \frac{r_3}{r_1})$.

Vnitřní stejnolehlost mezi k_1 *a* k_3 *je* $H'_{13}(I_{13}, -\frac{r_3}{r_1})$.

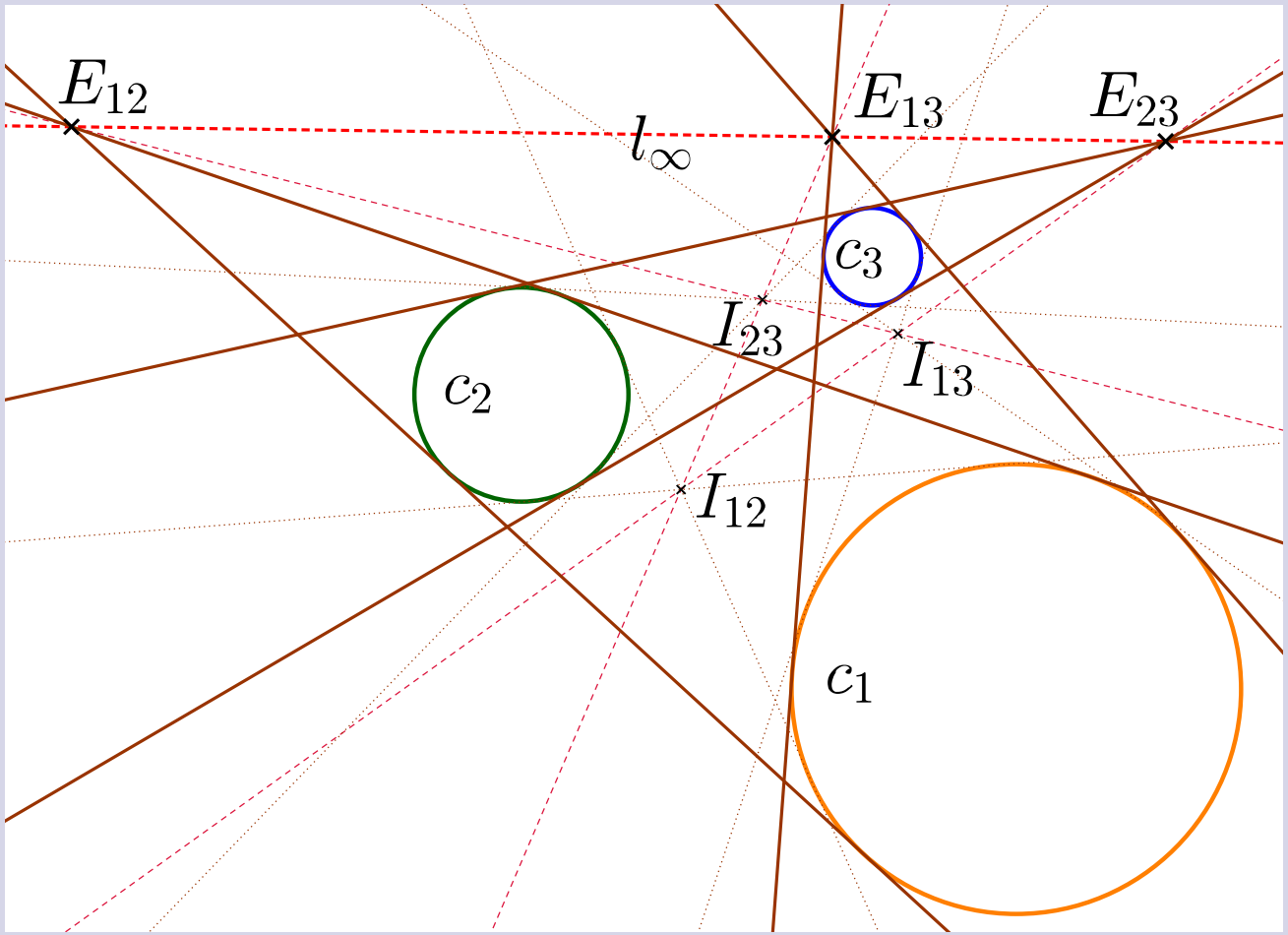
$H_{13} = H_{23} \circ H_{12}$ *a* E_{13} *leží na přímce* $\overleftrightarrow{E_{12}E_{23}}$

$H'_{13} = H_{23} \circ H'_{12}$ *a* I_{13} *leží na přímce* $\overleftrightarrow{I_{12}E_{23}}$ *atd.*

Mongeova věta

Věta (Mongeova věta)

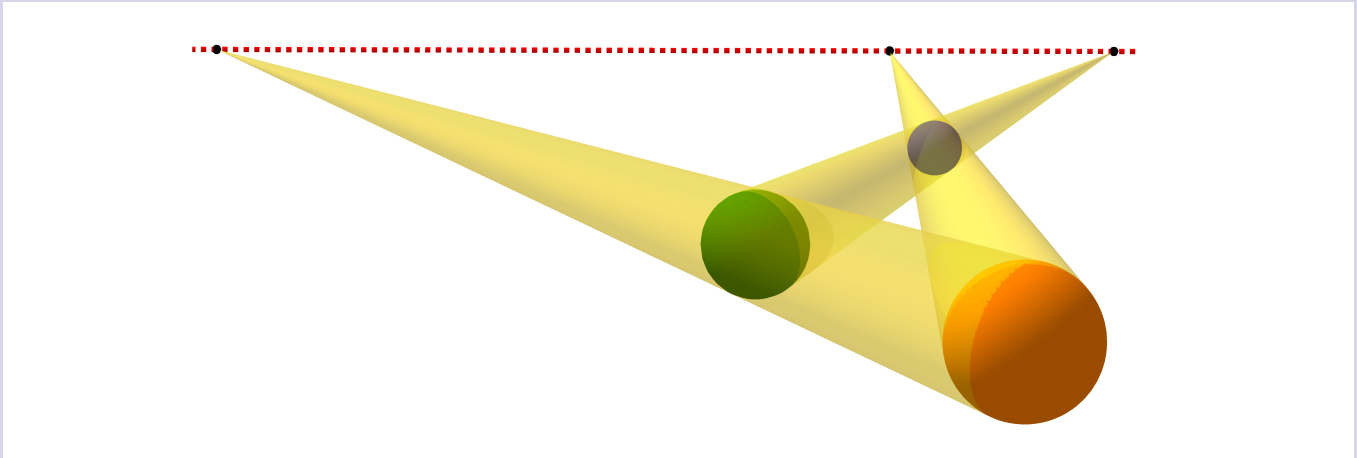
Důkaz



Mongeova věta

Věta (Mongeova věta)

Důkaz



Stejnolehlost - kružnicový dodatek

Věta

Každou přímou vlastní podobnost lze rozložit na stejnolehlost a otočení se stejným středem.

Důkaz

Přímá vlastní podobnost je zadána 2 páry odpovídajících si bodů $X, Y \to X', Y'$.

1) $\overline{XY} \parallel \overline{X'Y'}$, *potom existuje stejnolehlost.*

2) $\overline{XY} \nparallel \overline{X'Y'} \Rightarrow \exists K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X'Y'}$.

Sestrojíme kružnice opsané $k_x(XX'K), k_y(YY'K)$*:*

2a) k_x, k_y *mají společný právě bod* K *a platí (stejnolehlost* k_x *a* k_y*), že* $\frac{|KX|}{|KX'|} = \frac{|KY|}{|KY'|}$

rotace se středem $K : X \to X_1, Y \to Y_1$ *a následně stejnolehlost se středem* $K : X_1 \to X', Y_1 \to Y'$.

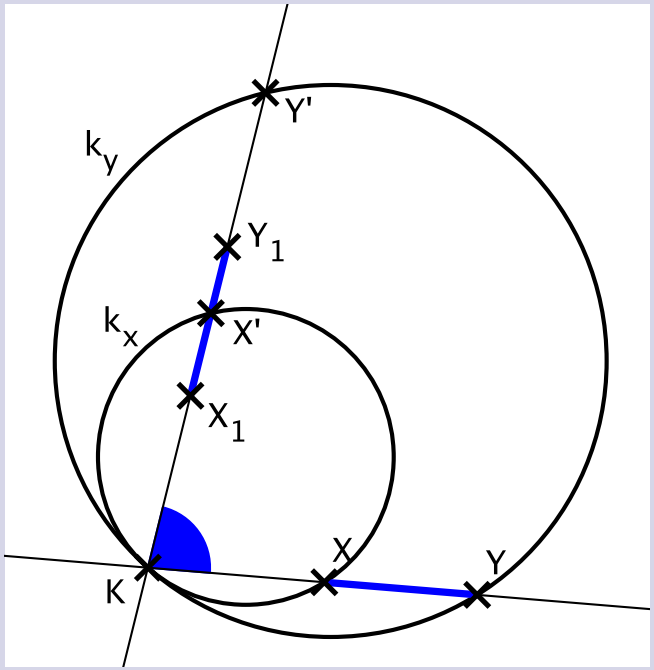
Stejnolehlost - kružnicový dodatek

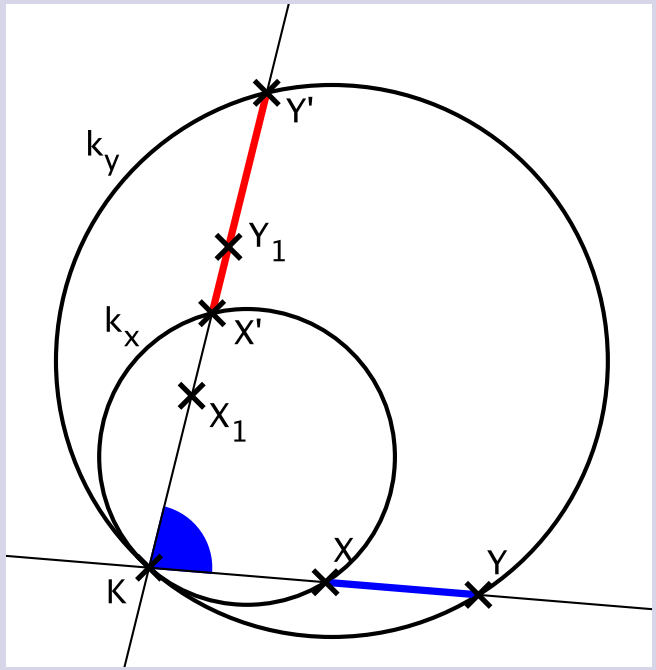
Věta

Každou přímou vlastní podobnost lze rozložit na stejnolehlost a otočení se stejným středem.

Důkaz

2a)





Stejnolehlost - kružnicový dodatek

Věta

Každou přímou vlastní podobnost lze rozložit na stejnolehlost a otočení se stejným středem.

Důkaz

2b) k_x, k_y mají společné body $K, S \rightarrow$ obvodové úhly $|\sphericalangle SXK| = |\sphericalangle SX'K|$; $|\sphericalangle SYK| = |\sphericalangle SY'K|$, a $\triangle SXY \sim \triangle SX'Y'$ (podle uu), takže použijeme rotaci se středem S o úhel $\sphericalangle XSX' : X \rightarrow X_1, Y \rightarrow Y_1$. a potom stejnolehlost se středem $S : X_1 \rightarrow X', Y_1 \rightarrow Y'$.

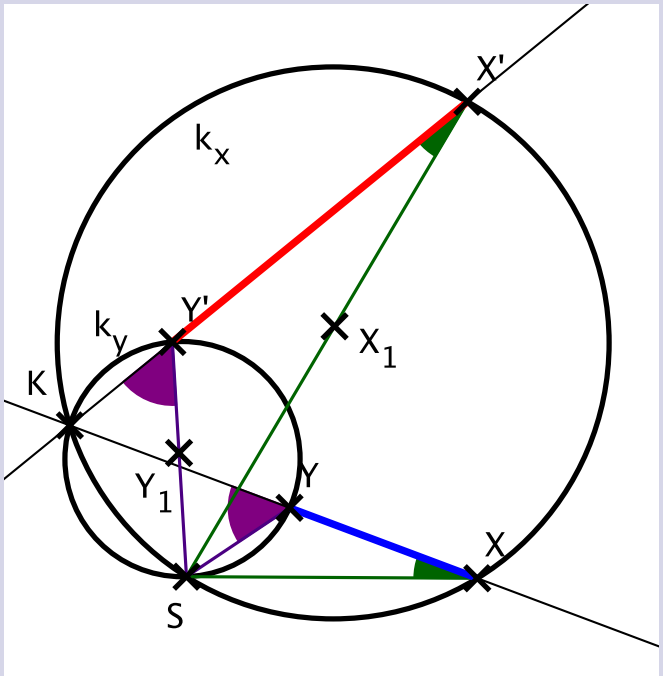
Stejnolehlost - kružnicový dodatek

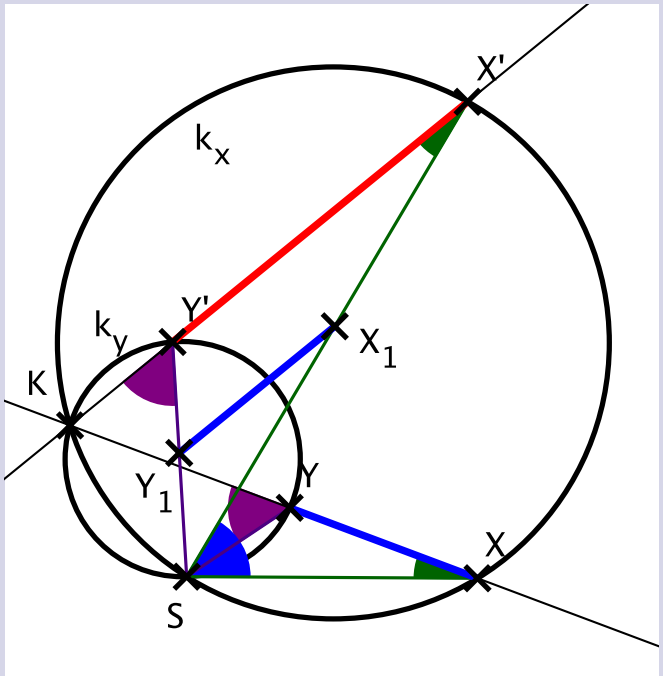
Věta

Každou přímou vlastní podobnost lze rozložit na stejnolehlost a otočení se stejným středem.

Důkaz

2b)





Stejnolehlost - kružnicový dodatek

Věta

Každou nepřímou vlastní podobnost lze rozložit na stejnolehlost a osovou souměrnost, jejíž osa prochází středem stejnolehlosti.

Věta

Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod.

Důkaz

Důsledek předešlých dvou vět je, že existuje alespoň jeden samodružný bod. Kdyby existovali dva samodružné body, tak jejich vzdálenost se zachovává a jde o shodnost.

Chordála dvou kružnic

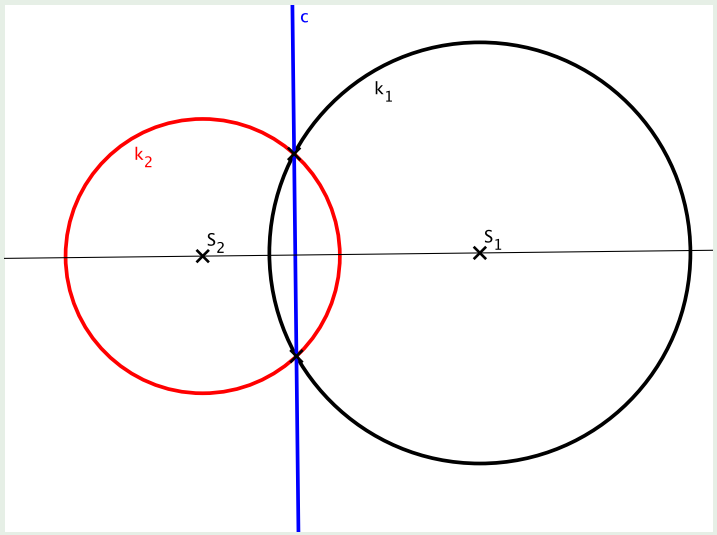
Definice (Chordála)

Množina všech bodů, které mají stejnou mocnost k dvoum nesoustředným kružnicím se nazývá *chordála*.

Chordála je přímka kolmá ke středné (bez důkazu).

Konstrukce

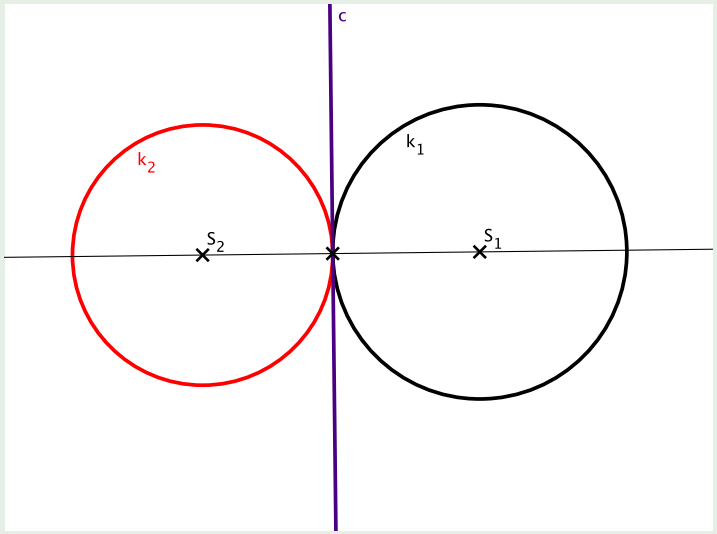
$k_1 \cap k_2$ ve dvou bodech

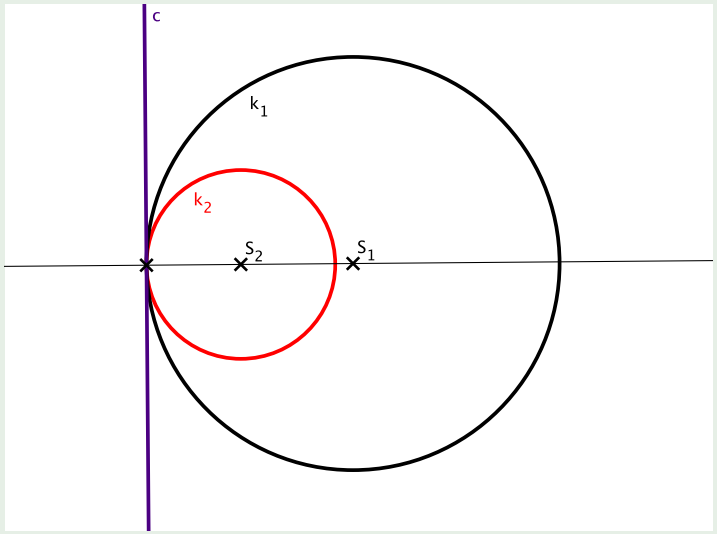


Chordála dvou kružnic

Konstrukce

$k_1 \cap k_2$ v jednom bodě

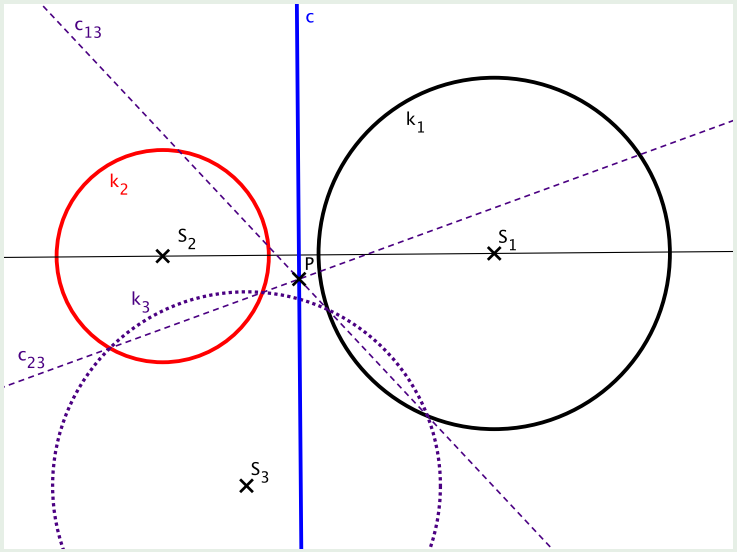


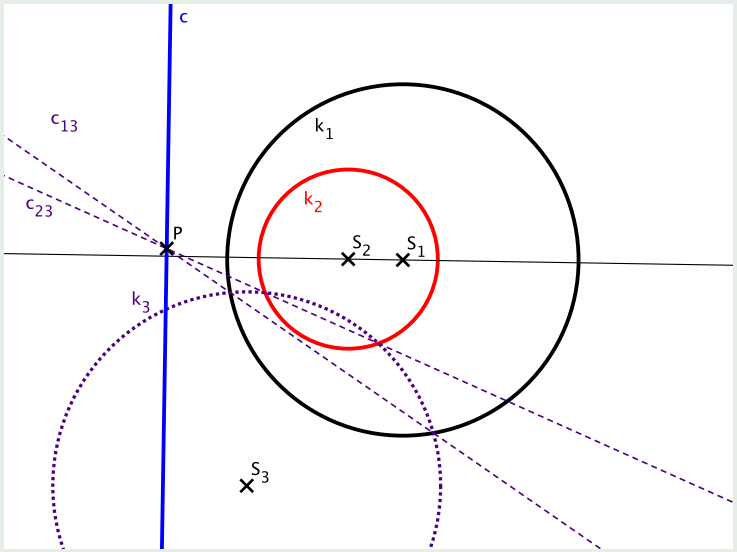


Chordála dvou kružnic

Konstrukce

k_1 a k_2 nemají společný bod





Použijeme třetí kružnici, která má 2 společné body s oběma kružnicemi. Průsečík jejich chordál se nazývá *potenční střed* a leží na chordále k_1 a k_2.

Apolloniova kružnice

Věta (Apolloniova kružnice)

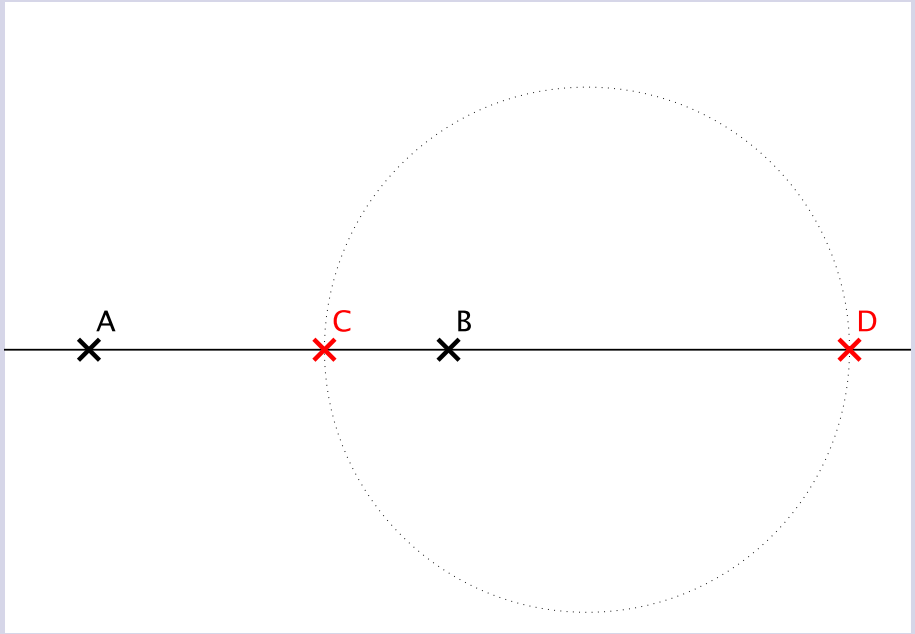
Nechť jsou v rovině dány dva různé body A, B a číslo $0 < \lambda \neq 1$.
Množinou všech bodů X dané roviny, pro něž platí $|AX| : |BX| = \lambda$, je kružnice k sestrojená nad průměrem $\overline{CD}$, kde C a D jsou body přímky $\overleftrightarrow{AB}$, splňující vztah

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \lambda.$$

Apolloniova kružnice

Věta (Apolloniova kružnice)

Důkaz ($\Rightarrow$)

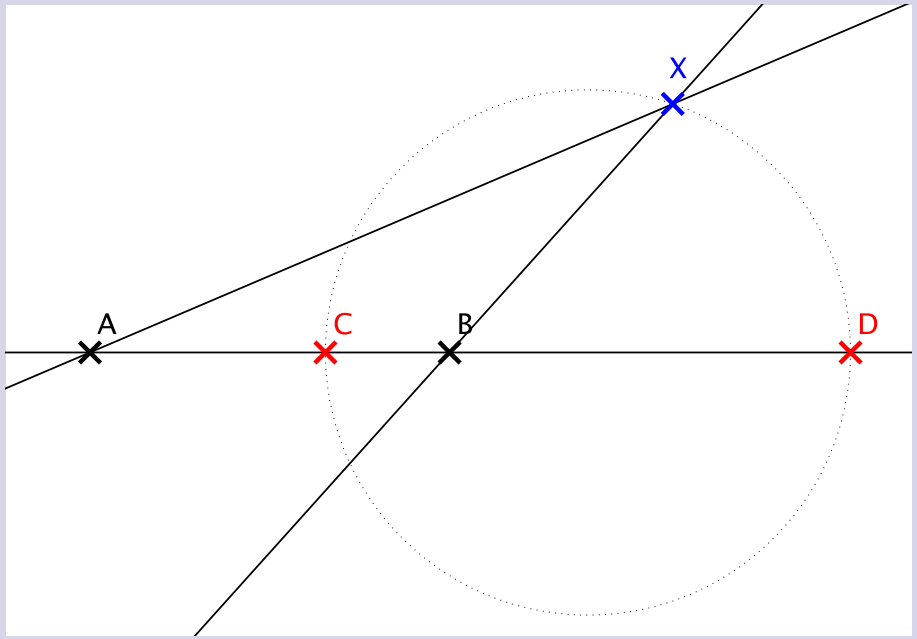


1. najdeme body C, D na přímce $\overleftrightarrow{AB}$, splňující $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \lambda$.

Apolloniova kružnice

Věta (Apolloniova kružnice)

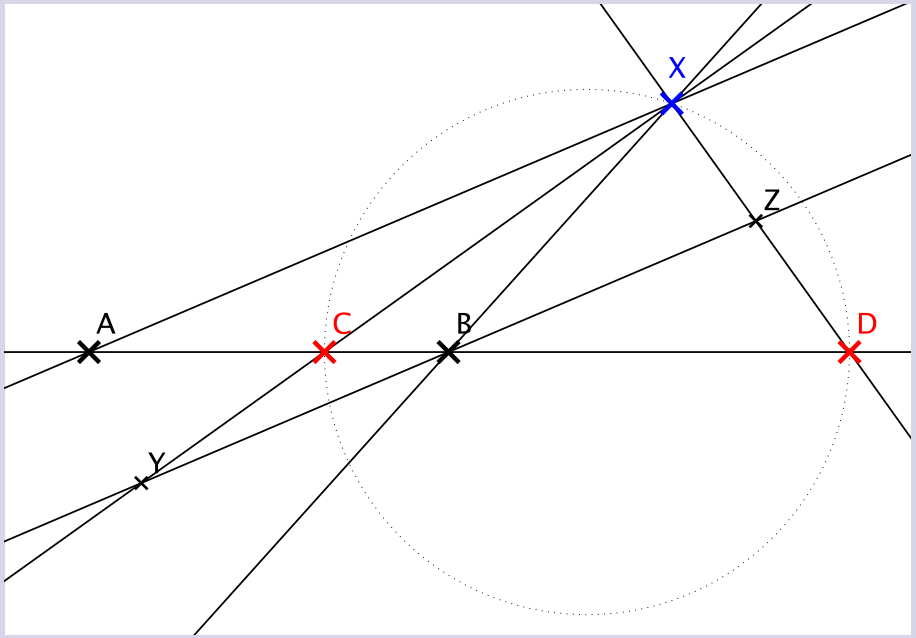
Důkaz ($\Rightarrow$)



2. nechť pro X platí $\frac{|AX|}{|BX|} = \lambda$. *Dokážeme, že X leží na Thalétově kružnici nad průměrem* $\overline{CD}$.

Věta (Apolloniova kružnice)

Důkaz ($\Rightarrow$)

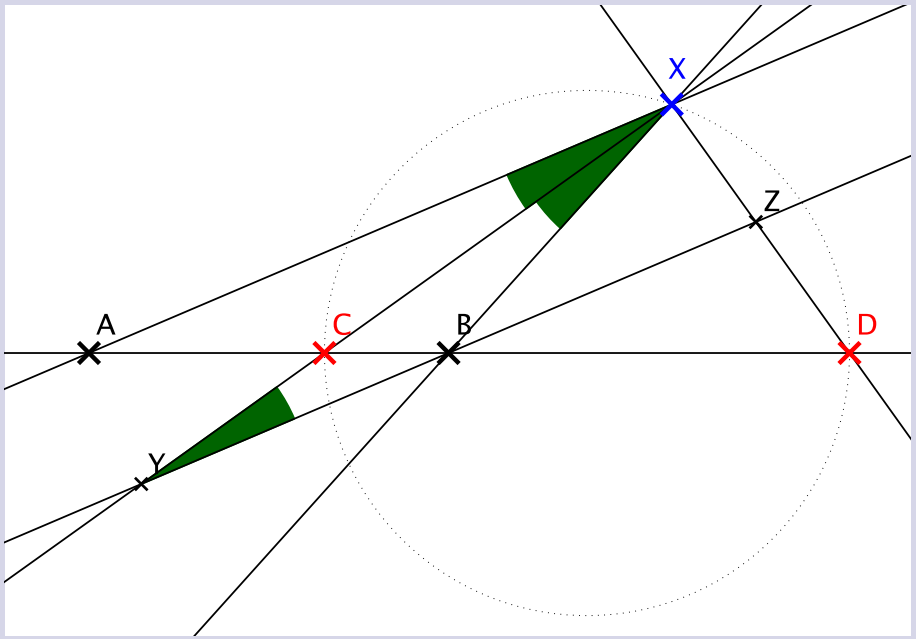


Bodem B vedeme rovnoběžku s $\overline{AX} \rightarrow \triangle XYZ$.

Apolloniova kružnice

Věta (Apolloniova kružnice)

Důkaz ($\Rightarrow$)

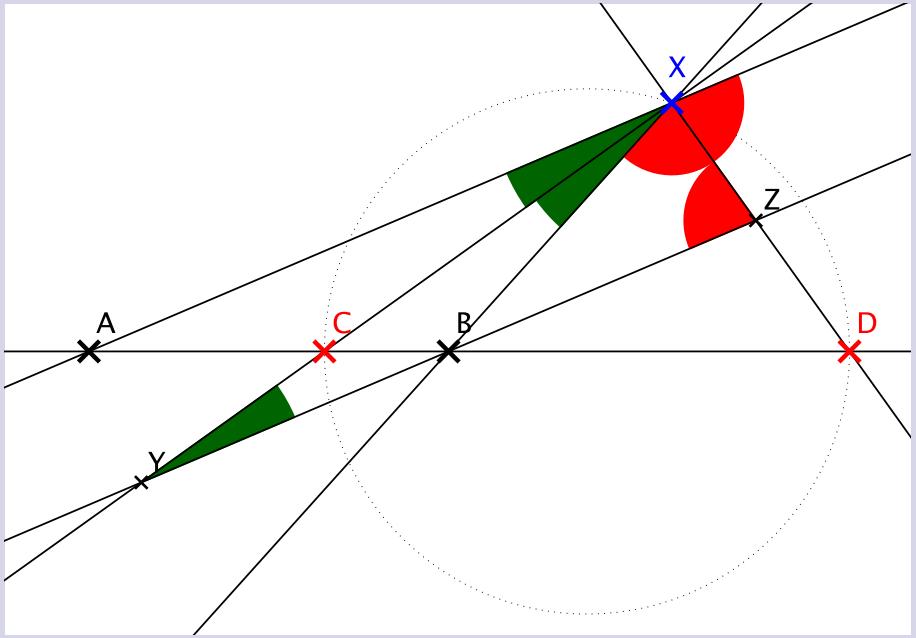


$$\triangle ACX \overset{uu}{\sim} \triangle BCY \Rightarrow \frac{AX}{BY} = \frac{AC}{BC} = \lambda = \frac{AX}{BX} \Rightarrow |BY| = |BX|$$

Apolloniova kružnice

Věta (Apolloniova kružnice)

Důkaz ($\Rightarrow$)

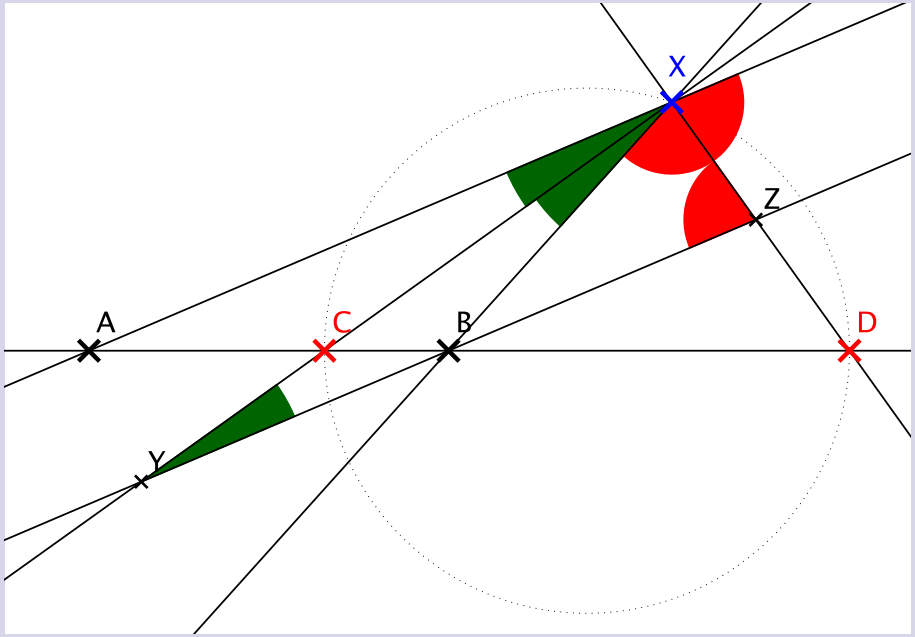


$$\triangle ADX \overset{uu}{\sim} \triangle BDZ \Rightarrow \frac{AX}{BZ} = \frac{AD}{BD} = \lambda = \frac{AX}{BX} \Rightarrow |BZ| = |BX|$$

Apolloniova kružnice

Věta (Apolloniova kružnice)

Důkaz ($\Rightarrow$)

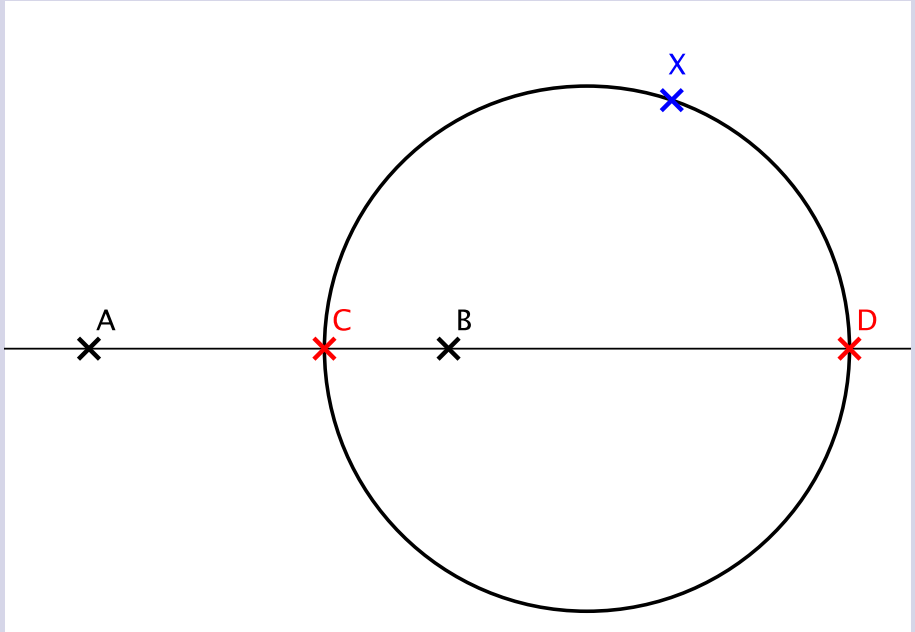


$2\sphericalangle(BXC) + 2\sphericalangle(BXD) = 180 \Rightarrow$ *X leží na Thalétově kružnici.*

Apolloniova kružnice

Věta (Apolloniova kružnice)

Důkaz ($\Leftarrow$)

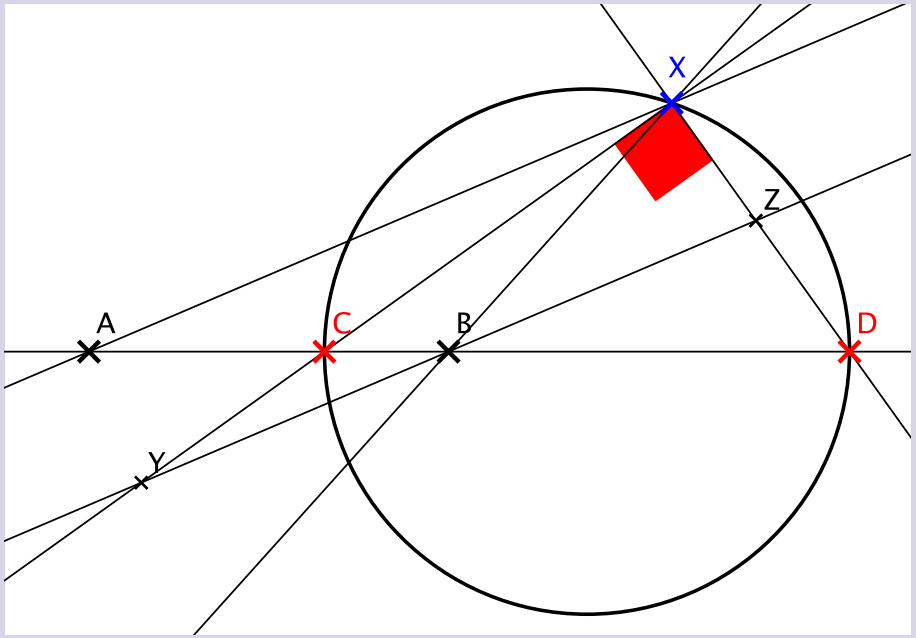


Nechť X leží na kružnici nad průměrem $\overline{CD}$.

Apolloniova kružnice

Věta (Apolloniova kružnice)

Důkaz ($\Leftarrow$)

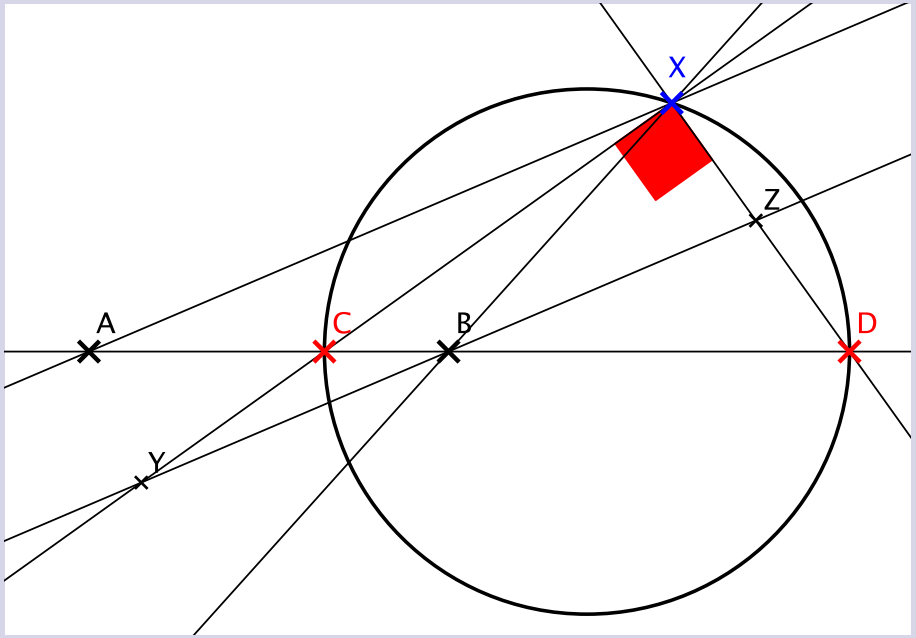


Ze stejných trojúhelníků jak v „$\Rightarrow$“ platí $|BY| = |BZ|$ a tedy X leží na Thalétově kružnici se středem B a poloměrem $|BY| = |BZ| = |BX|$.

Apolloniova kružnice

Věta (Apolloniova kružnice)

Důkaz ($\Leftarrow$)



Konečně $\lambda = \dfrac{|AX|}{|BY|} = \dfrac{|AX|}{|BX|}.$