Planimetrie

Afinita

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2025

www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/

Směr

Dvě rovnoběžné přímky mají stejný (neorientovaný) *směr*.

Definice (Samodružný směr)

Když se při zobrazení f zobrazí přímka p na přímku p' tak, že $p \parallel p'$, říkáme, že její (neorientovaný) směr je *samodružný*.

Afinní zobrazení v rovině

Definice (Afinní zobrazení v rovině)

Zobrazení $f : \rho \to \rho$ se nazývá *afinní zobrazení (transformace) v rovině* neboli *afinita* ρ, právě když jsou obrazy A', B', C' libovolných tří kolineárních bodů A, B, C rovněž kolineární a pro její dělicí poměry platí

$$(AB; C) = (A'B'; C').$$

Osová afinita

Definice (Osová afinita)

Osová afinita je afinita, která má přímku samodružných bodů o, nazýváme ji *osa afinity* a samodružný směr $\overrightarrow{s}$, nazýváme jej *směr afinity*. Body a jejich obrazy leží na přímkách se směrem $\overrightarrow{s}$.

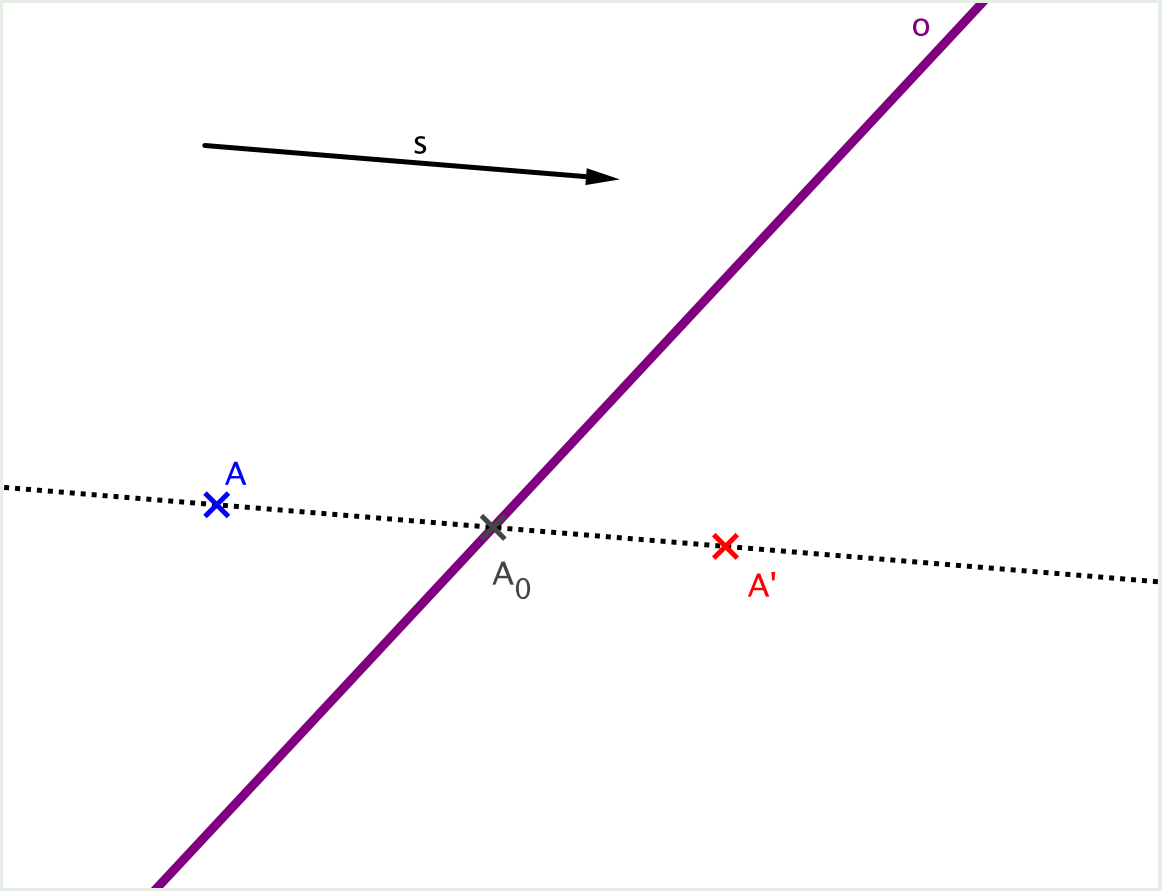
Definice (Charakteristika k osové afinity)

Nechť **a** je osová afinita s osou o, která zobrazí bod X na X'. Dále nechť X_0 je průsečík přímky $\overleftrightarrow{XX'}$ s osou o. Číslo $k = (X'X; X_0)$ nazýváme *charakteristikou osové afinity* **a**.

Pozn. Osovou afinitu si můžeme představit jako středovou kolineaci, která má střed v nekonečnu.

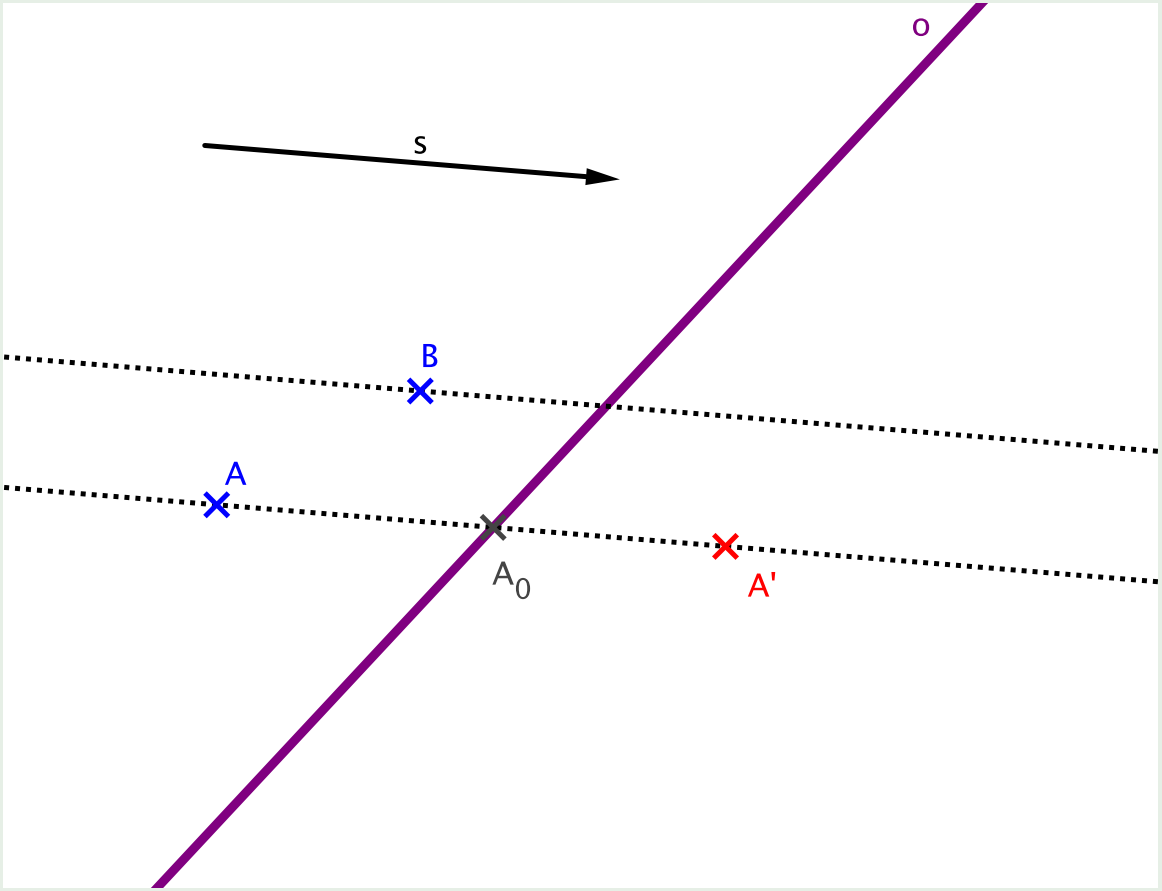
Osová afinita

Příklad (Zadání o, $\overrightarrow{s}$, $A \to A'$)



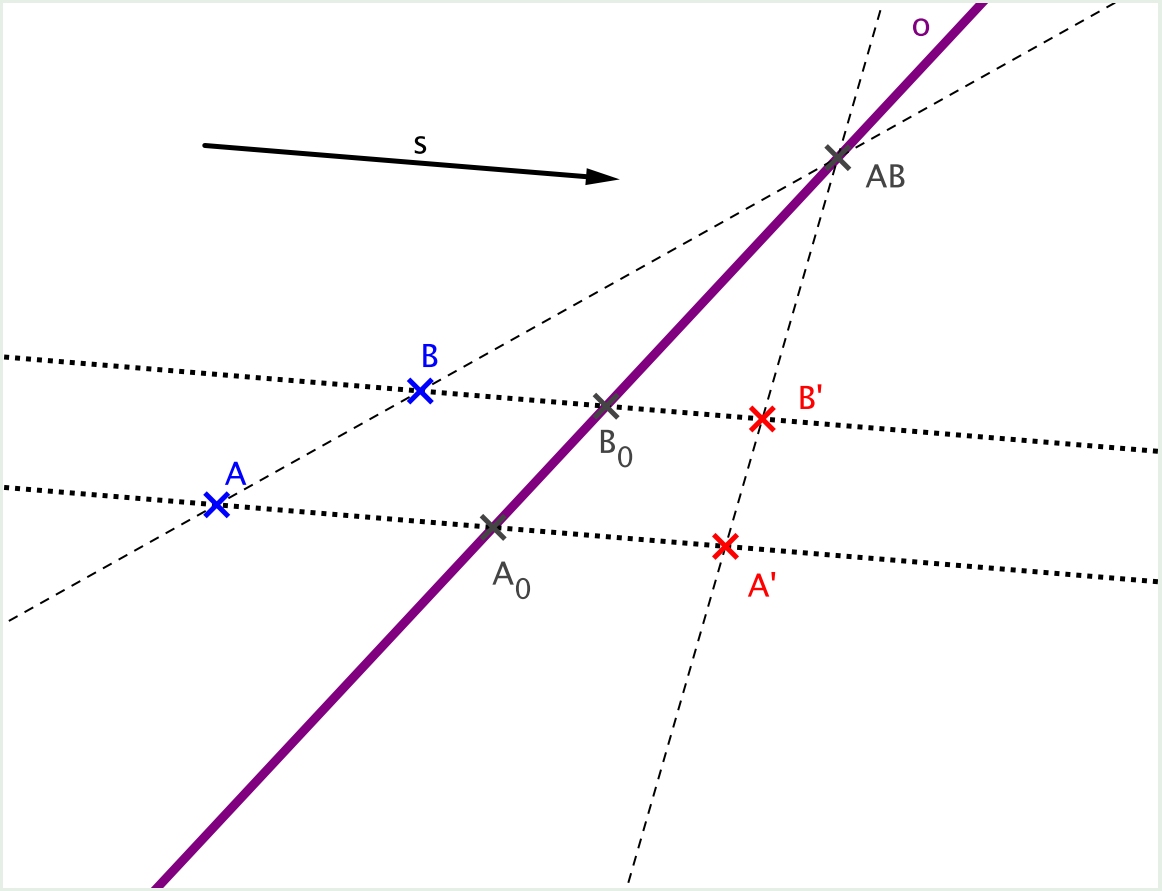
Osová afinita

Příklad (Zadání o, $\overrightarrow{s}$, $A \to A'$)



Osová afinita

Příklad (Zadání o, $\overrightarrow{s}$, $A \to A'$)

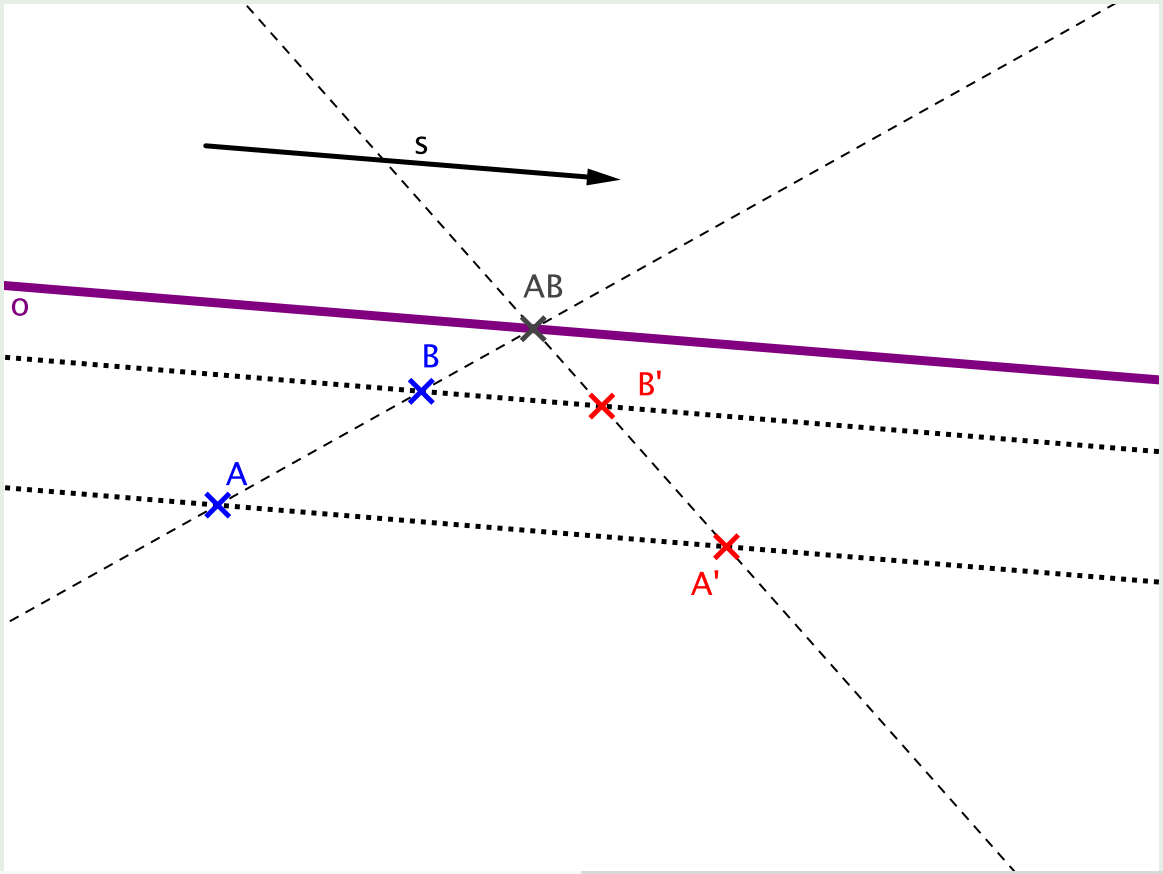


Osová afinita

Definice (Elace)

Elace je osová afinita jejíž směr je rovnoběžný s osou afinity.

Příklad



Osová afinita

Věta

Libovolné afinní zobrazení lze rozložit na nejvýše tři osové afinity.

Důkaz (skripta 146)

Vlastnosti afinity

Věta (Vlastnosti afinity)

Afinita

1. *zachovává incidenci.*
2. *zachovává uspořádání.*
3. *zachovává dvojpoměr.*
4. *zachovává středy úseček (a dělicí poměr).*
5. *NEzachovává velikosti úhlů.*
6. *NEzachovává délky úseček (a obsahy).*

Dělicí poměr je *invariant* při afinitě.

Určenost afinity

Věta (Určenost afinity)

Afinita je určena

1. *osou, směrem a párem odpovídajících si bodů.*
2. *osou, směrem a charakteristikou.*
3. *třemi páry odpovídajících si bodů.*

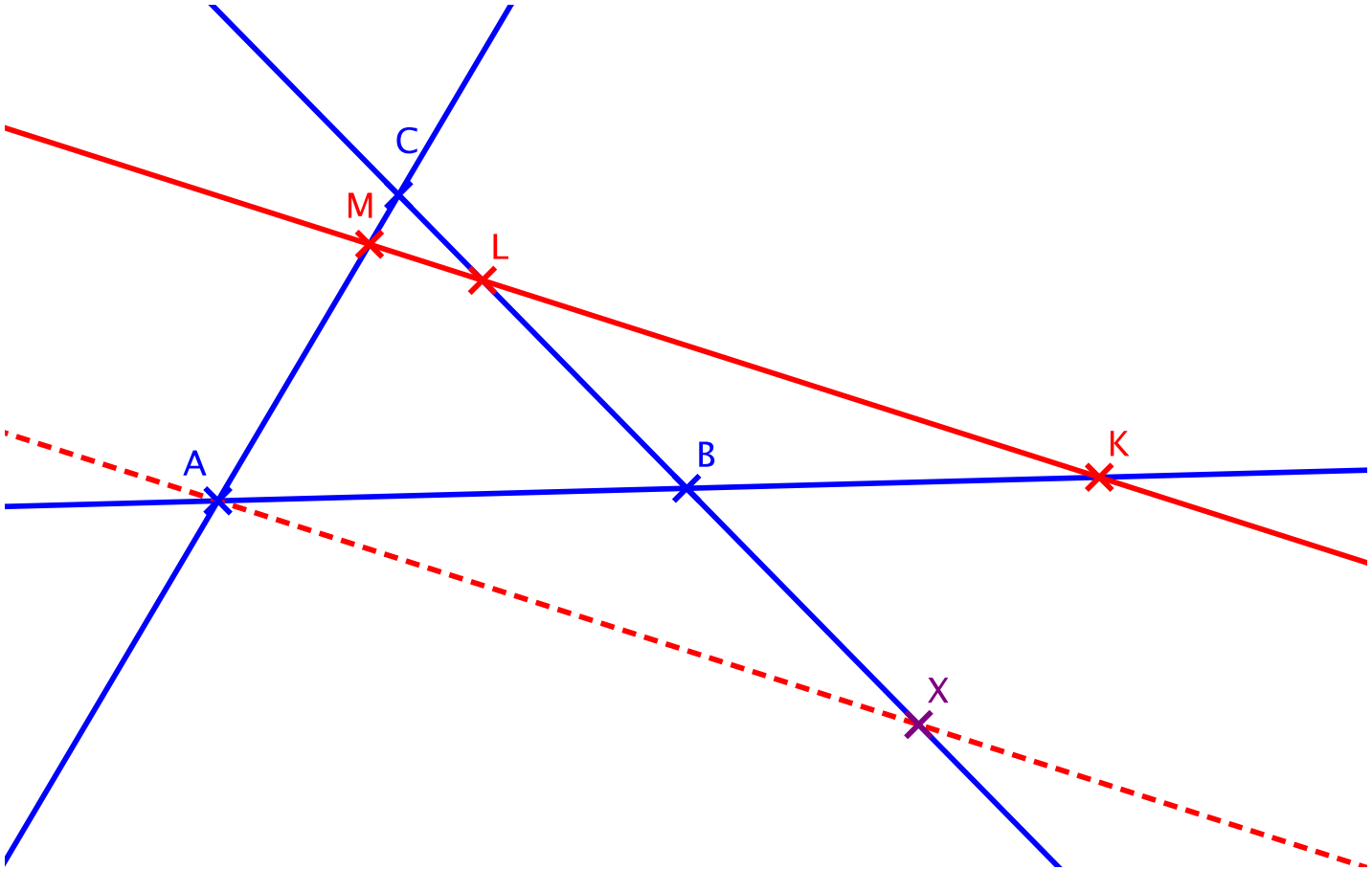
Menelaova a Cevova věta

Věta (Menelaova)

V rovině je dán $\triangle ABC$, na přímkách $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}$ leží po řadě body K, L, M, které jsou všechny různé od vrcholů $\triangle$. Leží-li body K, L, M na společné přímce, pak platí:

$$(AB; K)(BC; L)(CA; M) = 1$$

Menelaova a Cevova věta



Menelaova a Cevova věta

Věta (Menelaova)

V rovině je dán $\triangle ABC$, na přímkách $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}$ leží po řadě body K, L, M, které jsou všechny různé od vrcholů $\triangle$. Leží-li body K, L, M na společné přímce, pak platí:

$$(AB; K)(BC; L)(CA; M) = 1$$

Důkaz

„$\Rightarrow$“ Předpoklad: K, L, M jsou na přímce, pak sestrojíme $\overleftrightarrow{AX} \parallel \overleftrightarrow{KM} \Rightarrow (AB; K) = (XB; L), (CA; M) = (CX; L)$ dosadíme do dokazované rovnosti.

Platí i obrácená věta: Platí-li součin dělicích poměrů z Menelaovy věty, pak leží body K, L, M na jedné přímce.

Menelaova a Cevova věta

Věta (Cevova)

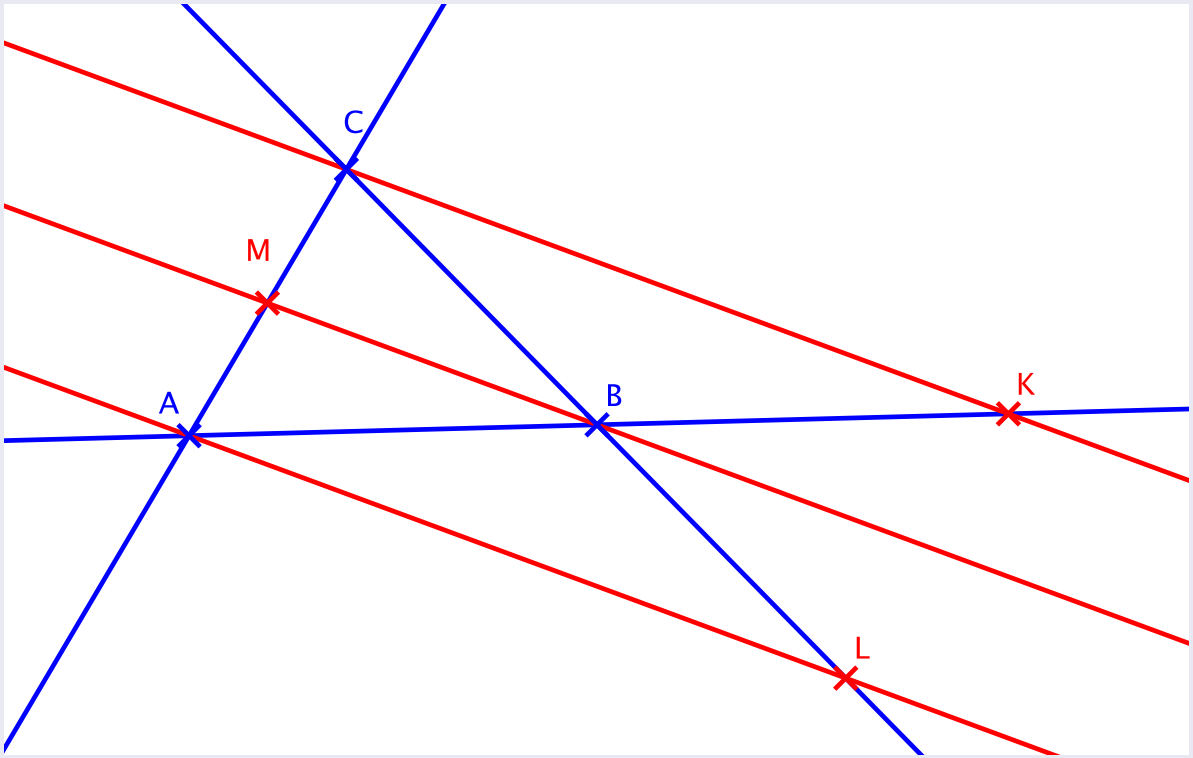
V rovině je dán $\triangle ABC$, na přímkách $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}$ leží po řadě body K, L, M, které jsou všechny různé od vrcholů $\triangle$. Procházejí-li přímky $\overleftrightarrow{CK}, \overleftrightarrow{AL}, \overleftrightarrow{BM}$ jedním bodem, nebo jsou-li rovnoběžné, pak platí:

$$(AB; K)(BC; L)(CA; M) = -1$$

Platí i obrácená věta: Platí-li součin dělicích poměrů z Cevovy věty, pak $\overleftrightarrow{CK}, \overleftrightarrow{AL}, \overleftrightarrow{BM}$ procházejí jedním bodem, nebo jsou spolu rovnoběžné.

Důkaz

a) rovnoběžné

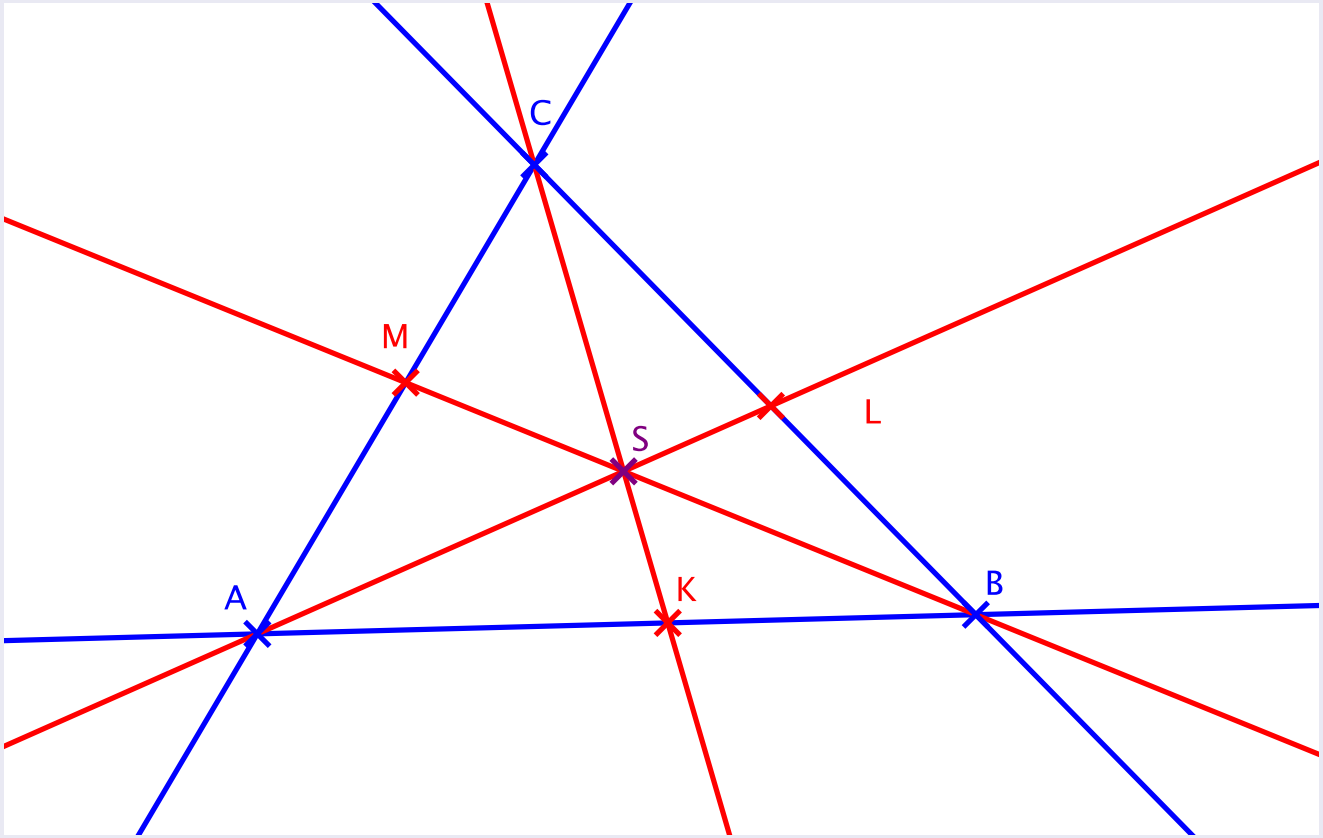


$(AB; K) = (AM; C), (BC; L) = (MC; A)$ *dosadíme do dokazované rovnosti*

Důkaz

b) procházejí bodem S

využijeme Menelaovu větu pro $\triangle AKC : (AK; B)(KC; S)(CA; M)$ *a* $\triangle BCK : (KB; A)(BC; L)(CK; S)$ *a přenásobíme*



Těžnice △

Definice (Těžnice)

Těžnice trojúhelníku je úsečka, která spojuje střed strany s protilehlým vrcholem.

Věta (O těžnicích)

Těžnice △ se protínají v právě jednom bodě, který nazýváme těžiště △. Těžiště rozděluje těžnice v poměru 1:2.

Důkaz

Obrácená Cevova věta $\rightarrow$ *protínejí se v 1 bodě*
Menelaova věta $\rightarrow$ *poměr je 1:2.*