# Planimetrie

## Kolineace

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2026

www.zamboj.com

# Incidence

*Incidence* je základní vztah - nedefinujeme ji.

Bod leží na přímce = Přímka prochází bodem = Bod je incidentní s přímkou.

**Definice**

Body, které jsou incidentní s jednou přímkou nazýváme *kolineární*.
Přímky, které jsou incidentní s jedním bodem nazýváme *konkurentní*.

# Incidenční (polohové) vlastnosti bodů a přímek

Každými dvěma různými body lze proložit přímku.

**Definice (Klasifikace přímek podle incidence)**

Dvě přímky jsou vzájemně

*totožné*, když mají společné všechny body

*různoběžné*, když mají společný právě jeden bod

*rovnoběžné*, když nejsou různoběžné ani totožné (resp. nemají společný žádný bod)

# Uspořádání, úsečka

*Mezi* je základní vztah - nedefinujeme ho.

Uspořádání bodů na přímce: Bod $B$ leží na přímce mezi body $A$ a $C$ a zároveň mezi body $C$ a $A$.

**Definice (Úsečka, orientovaná úsečka)**

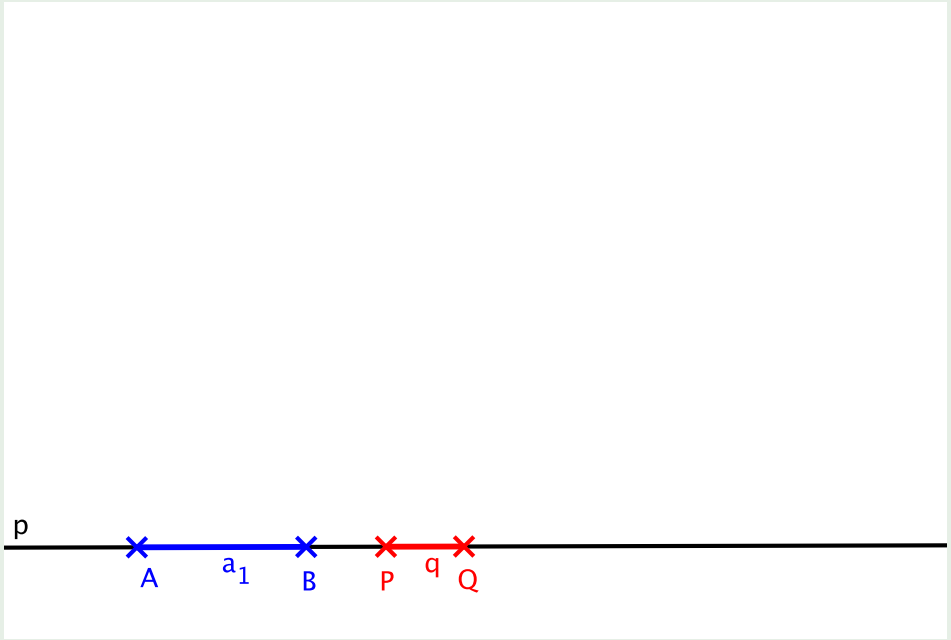
Množina všech bodů, které leží na přímce mezi body $A$ a $B$ včetně $A, B$ nazýváme *úsečka* $\overline{AB}$. Body $A$ a $B$ nazýváme *krajní*.

Volbou počátečního bodu $A$ a koncového bodu $B$ úsečky $\overline{AB}$ dostaneme *orientovanou úsečku* $\overrightarrow{AB}$.

# Sčítaní a odečítaní úseček

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

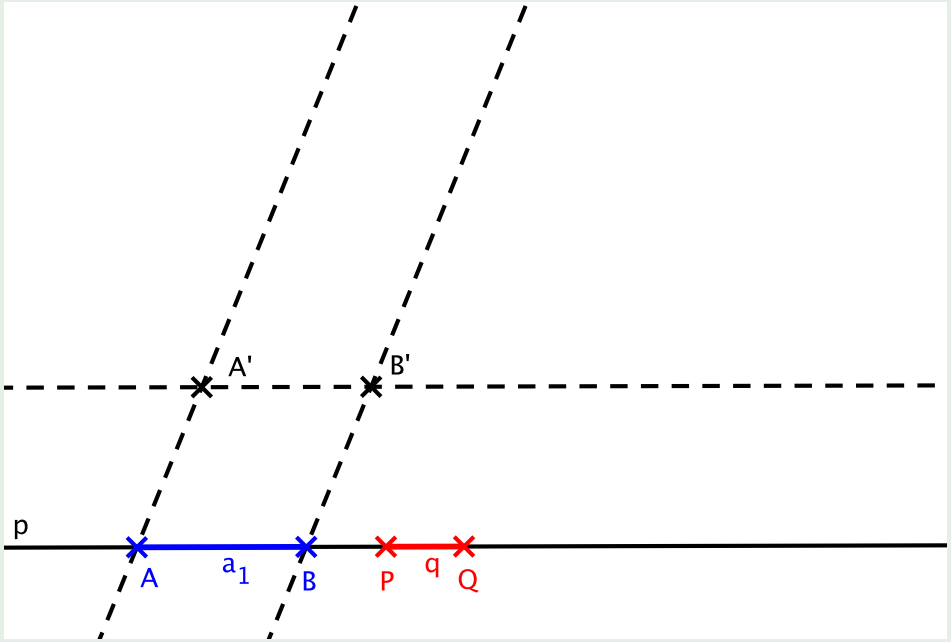
## Konstrukce (Sčítaní úseček)



# Sčítaní a odečítaní úseček

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

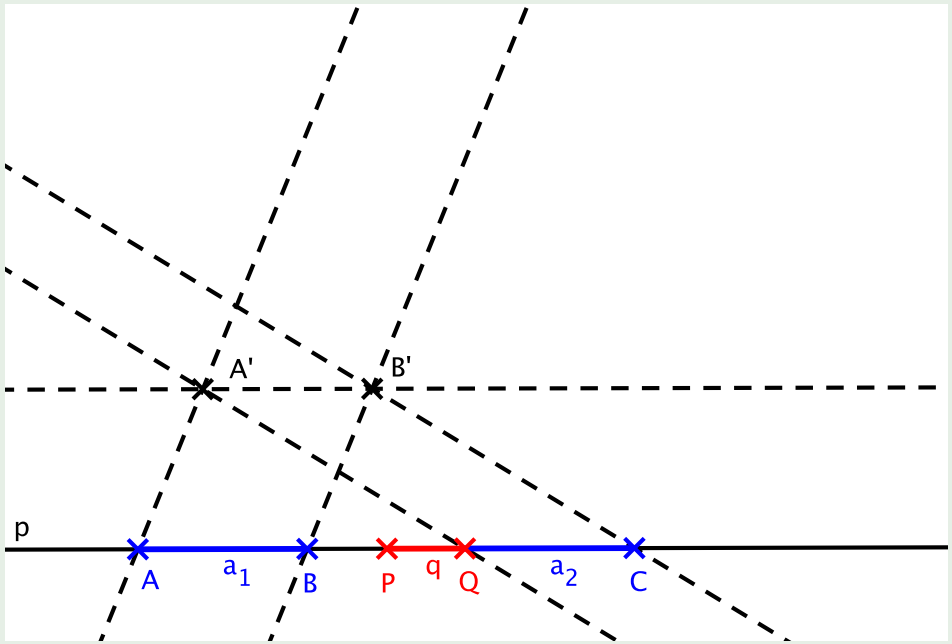
## Konstrukce (Sčítaní úseček)



# Sčítaní a odečítaní úseček

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

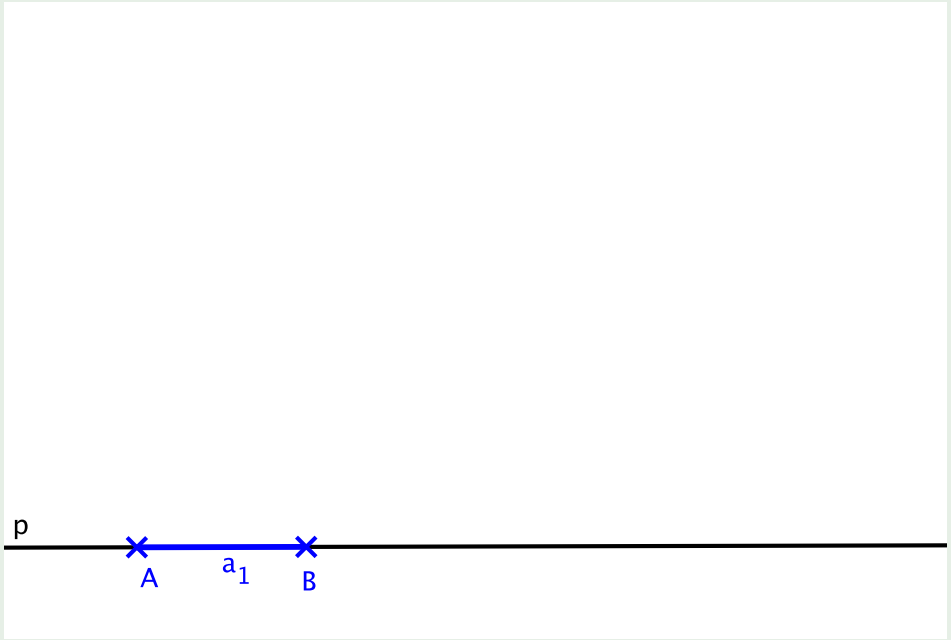
## Konstrukce (Sčítaní úseček)



# Násobení úsečky číslem

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

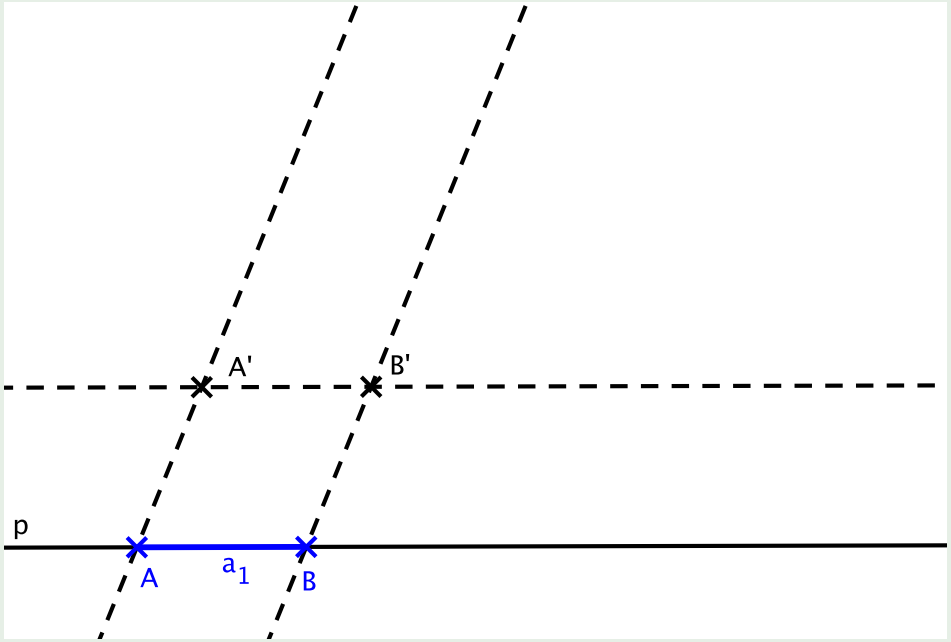
## Konstrukce (Násobení úsečky číslem)



# Násobení úsečky číslem

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

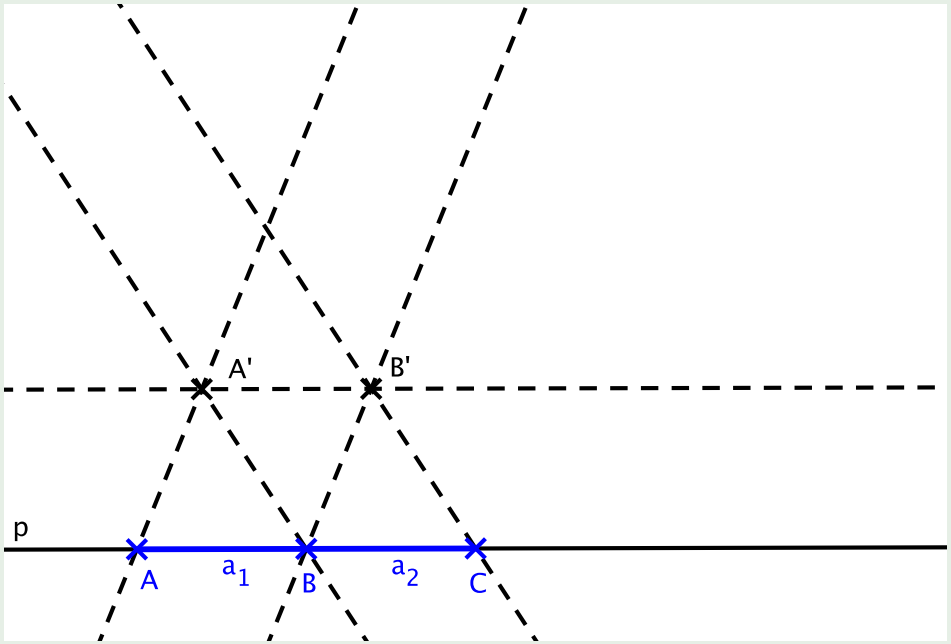
## Konstrukce (Násobení úsečky číslem)



# Násobení úsečky číslem

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

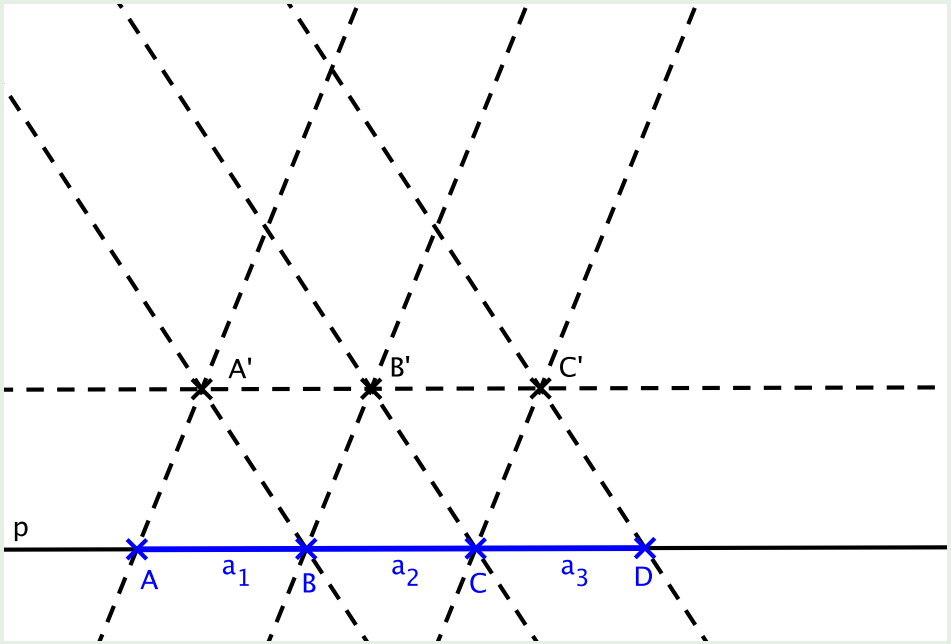
## Konstrukce (Násobení úsečky číslem)



# Násobení úsečky číslem

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

## Konstrukce (Násobení úsečky číslem)



# Dělicí poměr

## Definice (Dělicí poměr)

Nechť $A, B, C$ jsou tři různé kolineární body. *Dělicí poměr bodu $C$ vzhledem k bodům $A, B$,* je reálné číslo $\lambda$ takové, že

$$\lambda \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

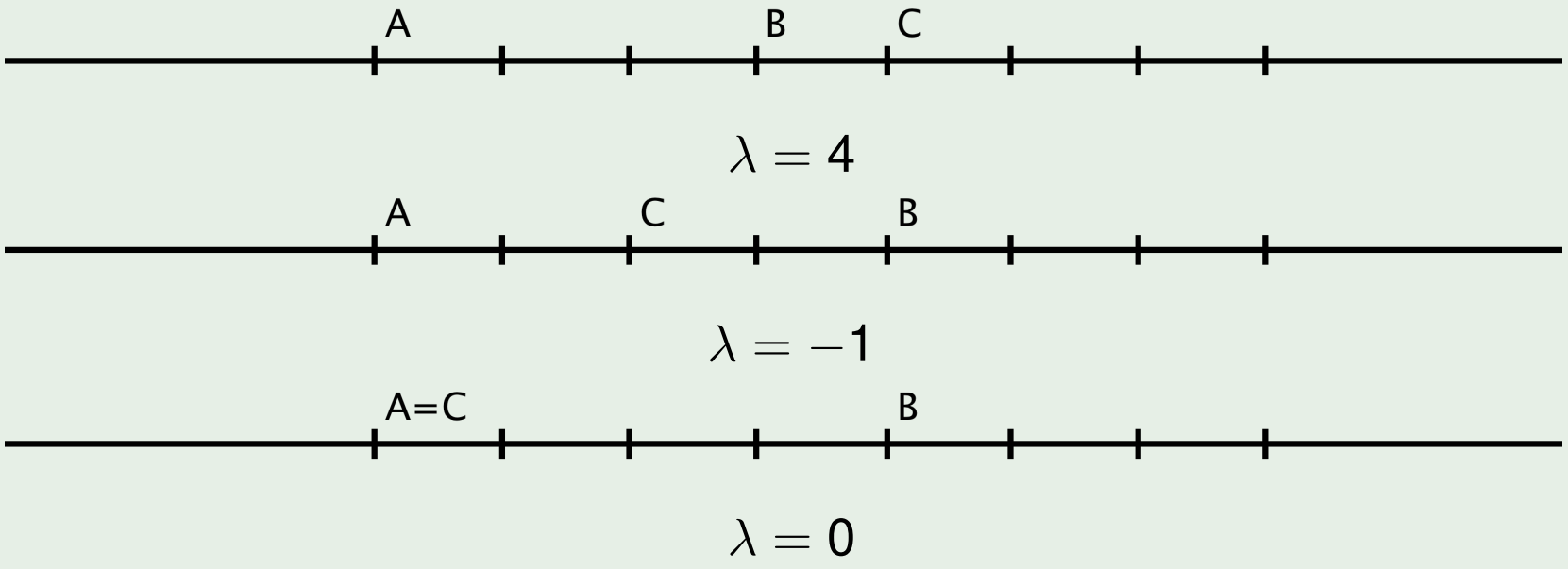
Zn. $(AB; C)$ (v učebnici $(ABC)$)

## Věta (Vlastnosti dělicího poměru)

- $\lambda \in (0; 1)$ *pro bod $C$ ležící vně úsečky $\overline{AB}$ za bodem $A$*
- $\lambda = 0$ *pro $C = A$*
- $\lambda < 0$ *pro bod $C$ ležící uvnitř úsečky $\overline{AB}$*
- $\lambda$ *neexistuje pro bod $C = B$*
- $\lambda > 1$ *pro bod $C$ ležící vně úsečky $\overline{AB}$ za bodem $B$*
- $\lambda \neq 1$

# Dělicí poměr

## Příklad



# Kolineace

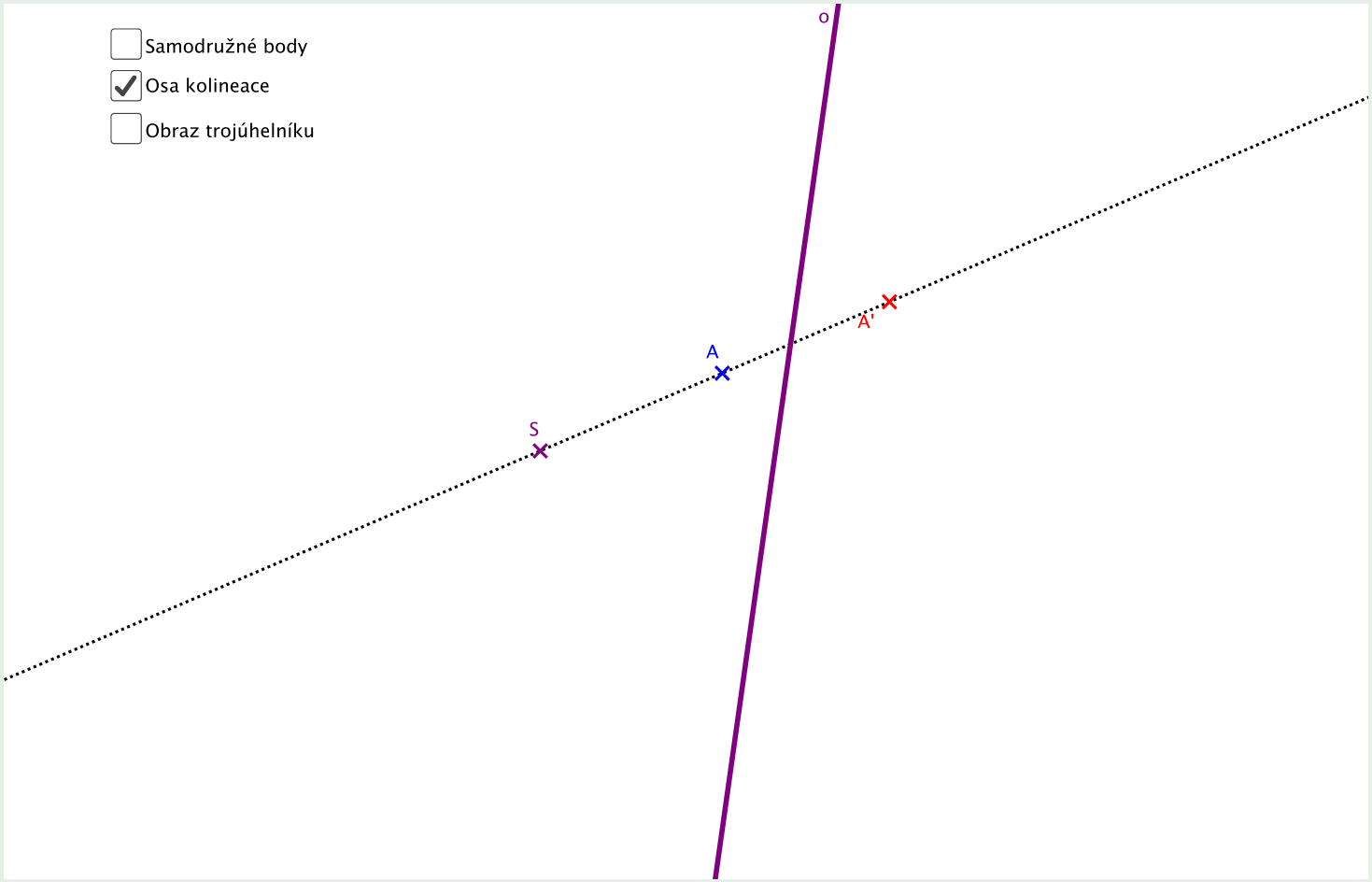
**Definice (Kolineace)**

Zobrazení $k : \rho \to \rho$ nazýváme *kolineace*, když obrazy všech kolineárních bodů (kromě bodů, které se zobrazí do nekonečna) jsou kolineární.
"Přímky se zobrazí na přímky."

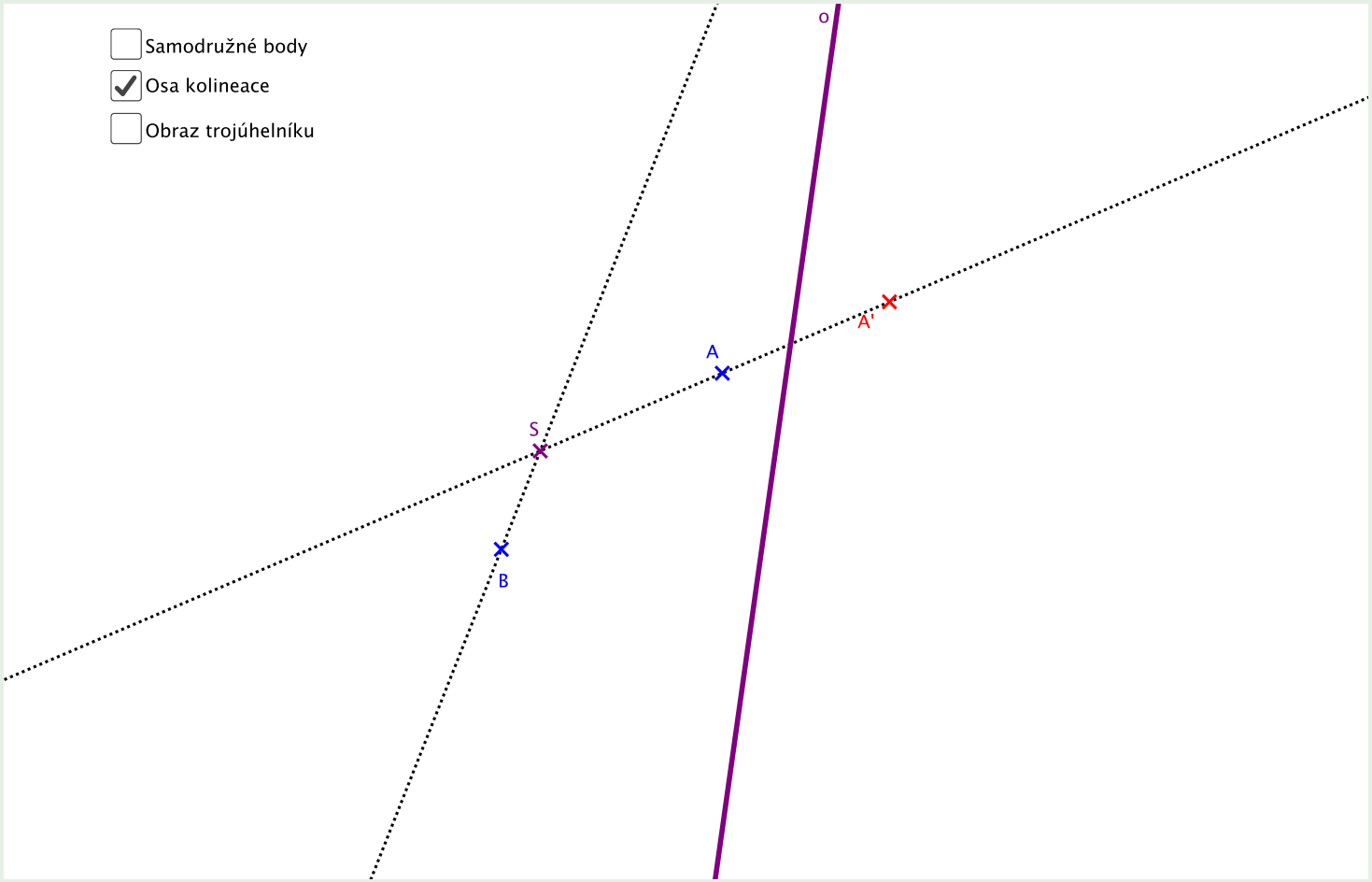
**Definice (Středová kolineace)**

*Středová kolineace* je kolineace, která má přímku samodružných bodů $o$, nazýváme ji *osou kolineace* a samodružný bod $S \notin o$, který nazýváme *střed kolineace*. Body a jejich obrazy leží na přímkách procházejících středem $S$.

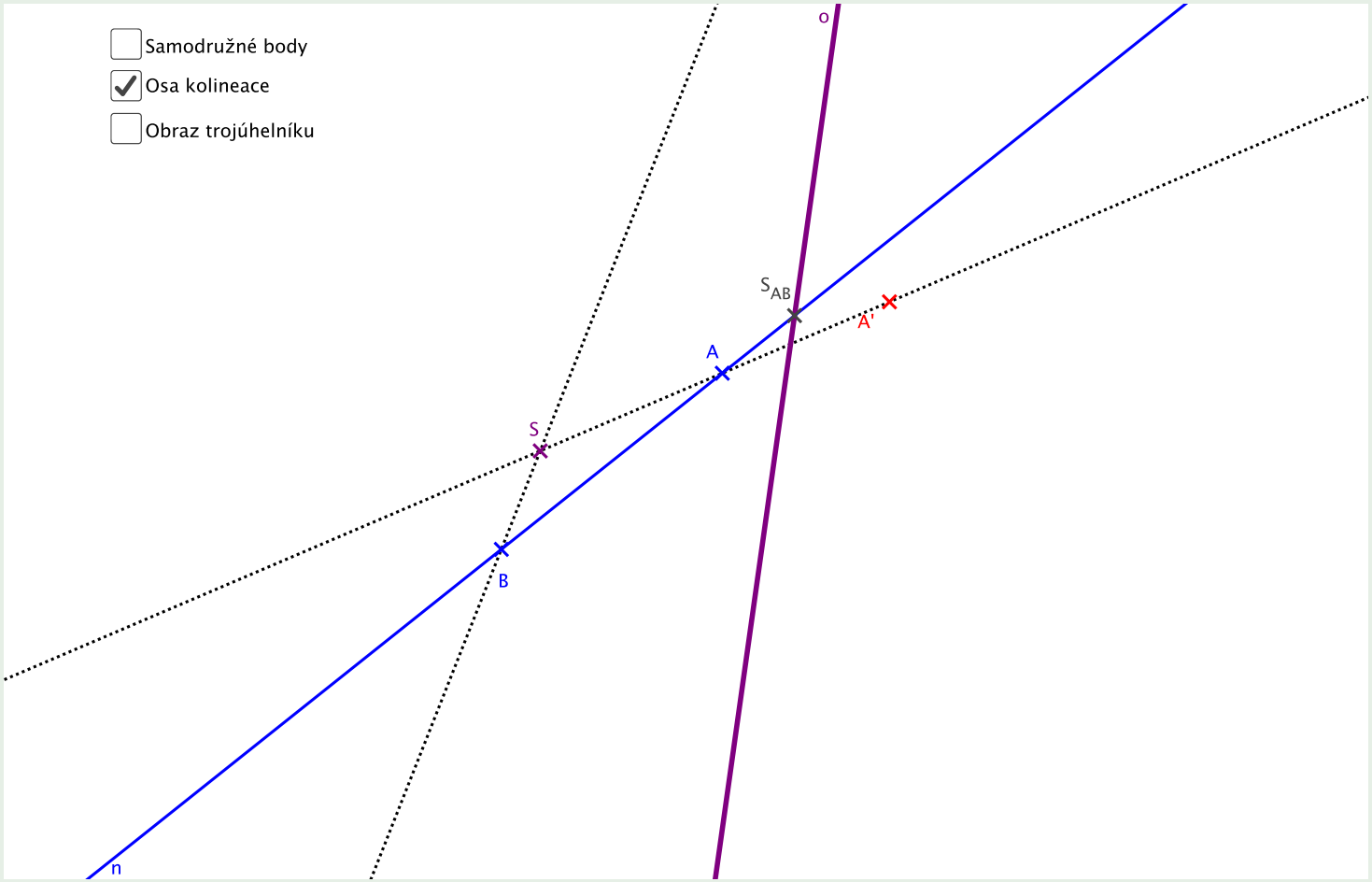
# Příklad (Zadání středové kolineace: $S, o, A \to A'$)



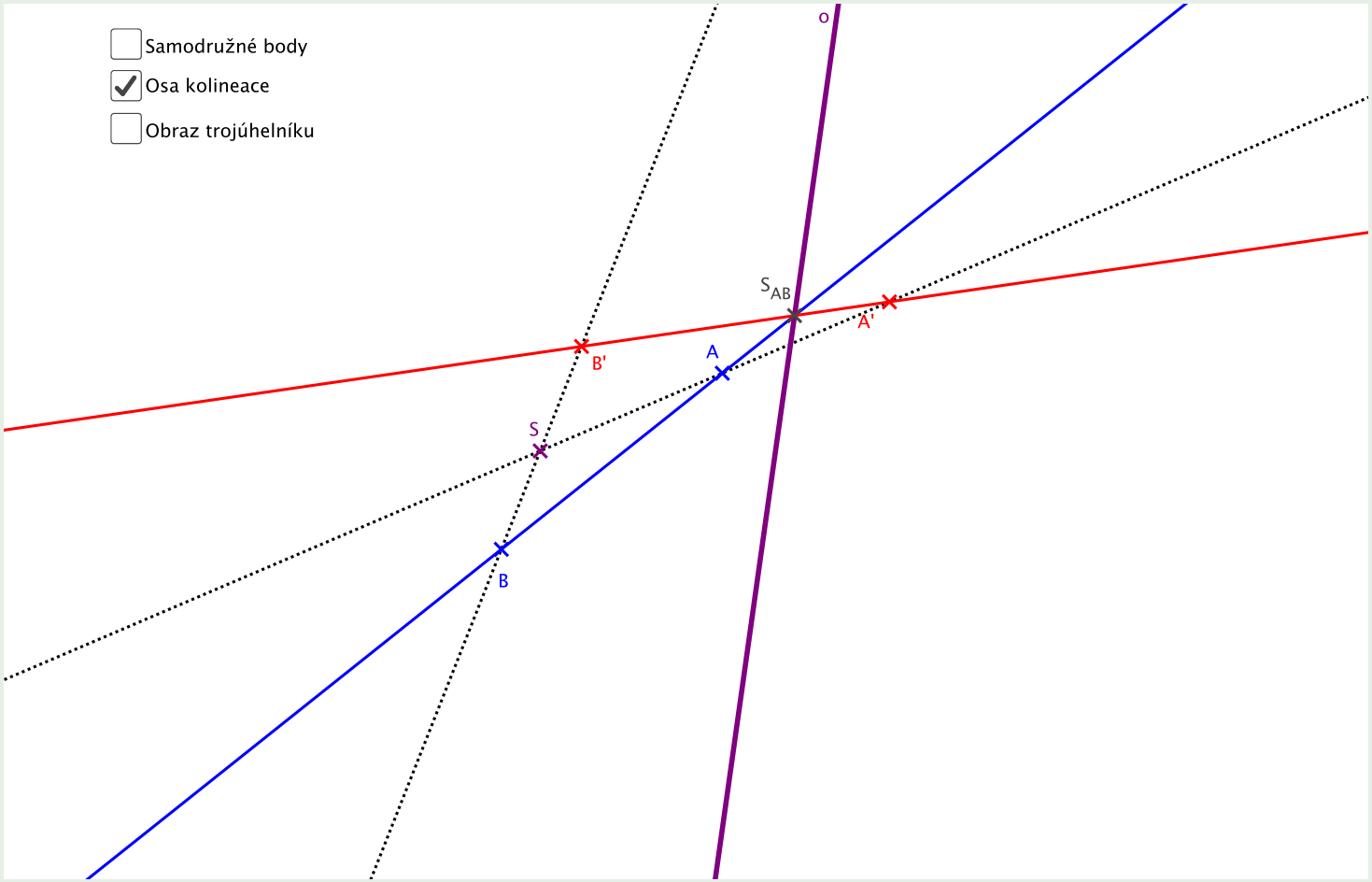
# Příklad (Zadání středové kolineace: $S, o, A \to A'$)



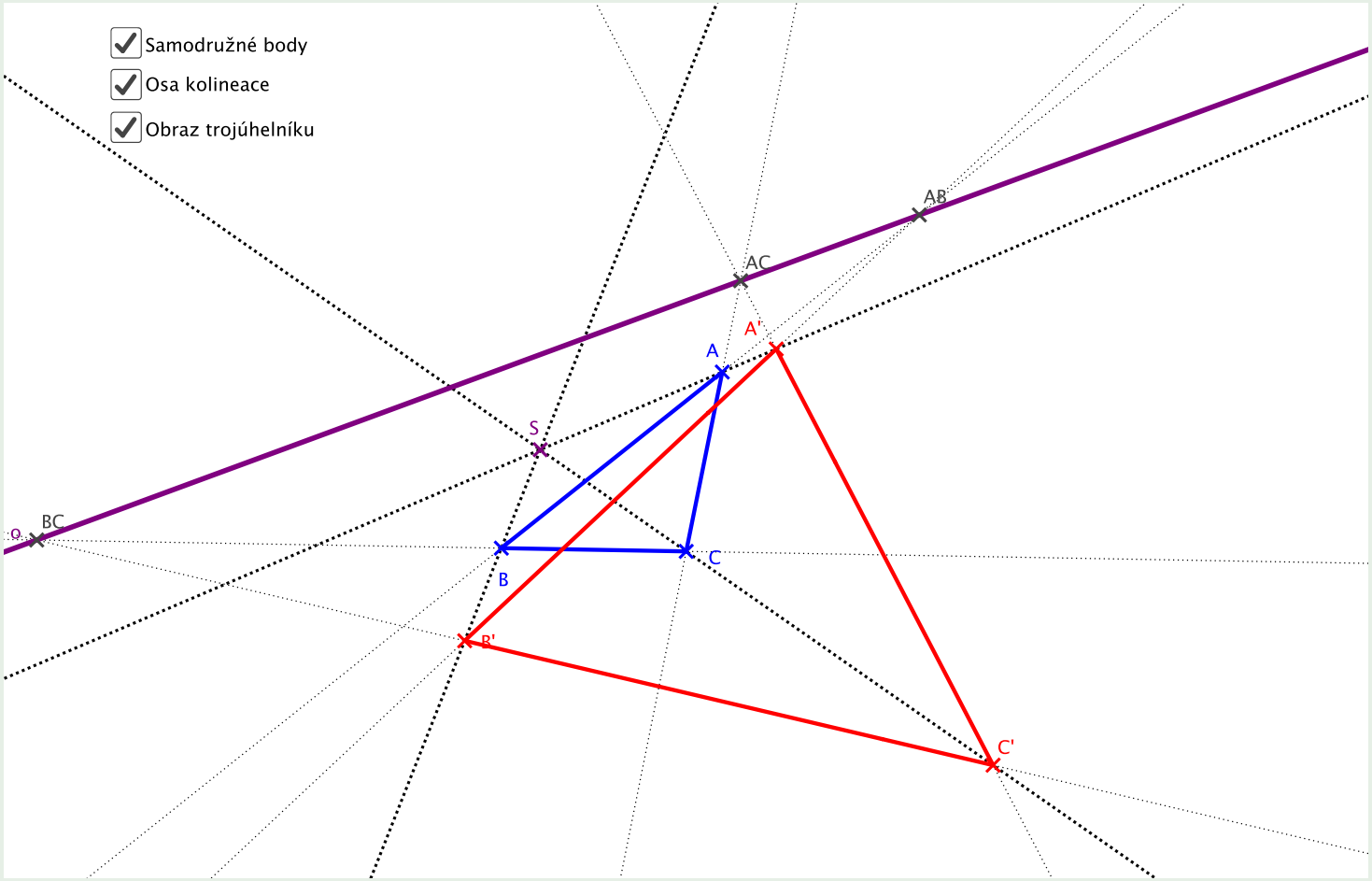
# Příklad (Zadání středové kolineace: $S, o, A \to A'$)



# Příklad (Zadání středové kolineace: $S, o, A \to A'$)



# Příklad


Samodružné body
Osa kolineace
Obraz trojúhelníku
AB
AC
A'
A
S
BC
o
B
C
B'
C'

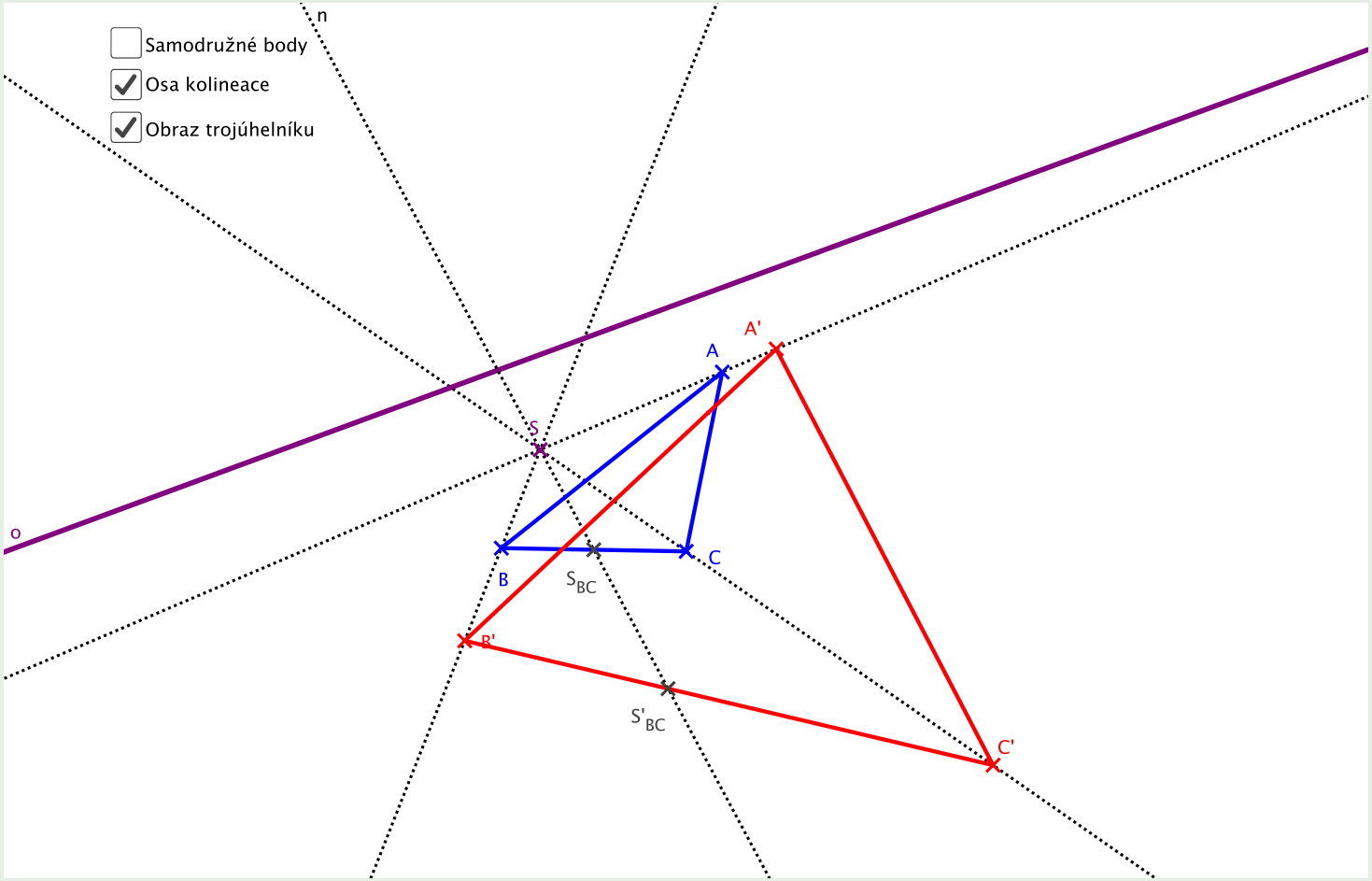
# Vlastnosti kolineace

**Věta (Vlastnosti kolineace)**

*Kolineace*

1. *zachovává incidenci.*

# Příklad


n
Samodružné body
Osa kolineace
Obraz trojúhelníku
o
S
A
A'
B
C
$S_{BC}$
B'
$S'_{BC}$
C'

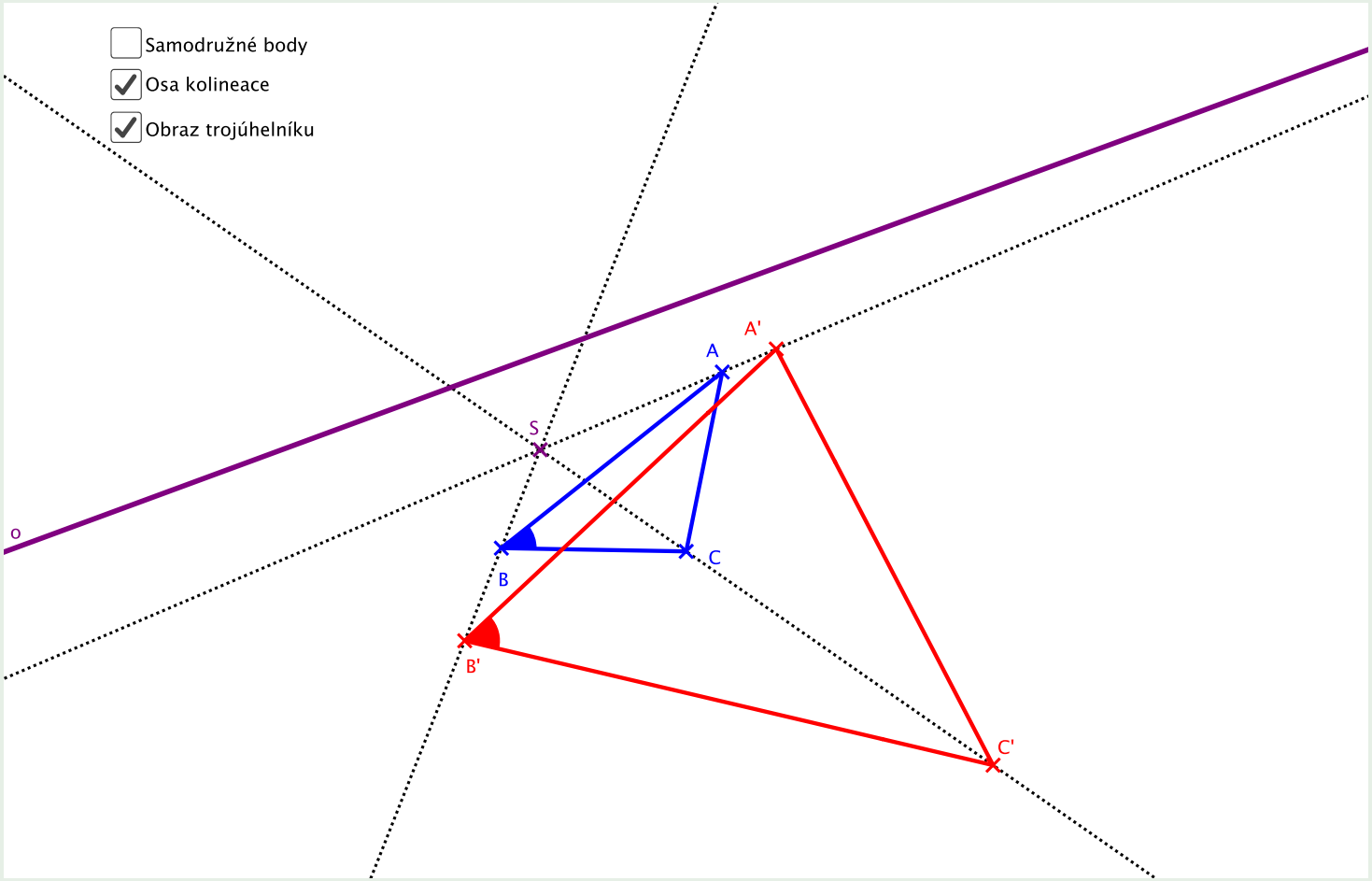
# Vlastnosti kolineace

**Věta (Vlastnosti kolineace)**

*Kolineace*

1. *zachovává incidenci.*
2. 
3. *NEzachovává středy úseček (a dělicí poměr).*

# Příklad


Samodružné body
Osa kolineace
Obraz trojúhelníku
o
S
A
A'
B
C
B'
C'

# Vlastnosti kolineace

**Věta (Vlastnosti kolineace)**

*Kolineace*

1. *zachovává incidenci.*
2. 
3. *NEzachovává středy úseček (a dělicí poměr).*
4. *NEzachovává velikosti úhlů.*
5. *NEzachovává délky úseček (a obsahy).*

Pozor! Zatím "nevíme"co je to úhel a délka.

# Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

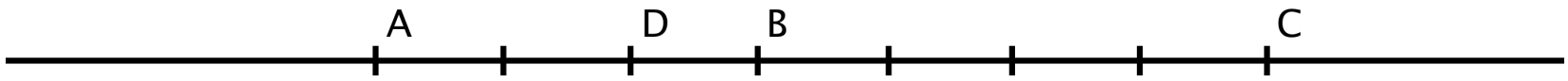
## Definice (Dvojpoměr)

Nechť $A, B, C, D$ jsou čtyři různé kolineární body. Číslo $(AB; CD) = \dfrac{(AB; C)}{(AB; D)}$ se nazývá *dvojpoměr bodů* $A, B, C, D$ (v tomto pořadí)

## Věta („Vlastnosti“ dvojpoměru)

$(AB; CD) < 0$ *pokud body* $C$ *a* $D$ *leží jeden uvnitř a jeden vně úsečky* $\overline{AB}$

$(AB; CD) > 0$ *pokud body* $C$ *a* $D$ *leží oba uvnitř nebo oba vně úsečky* $\overline{AB}$



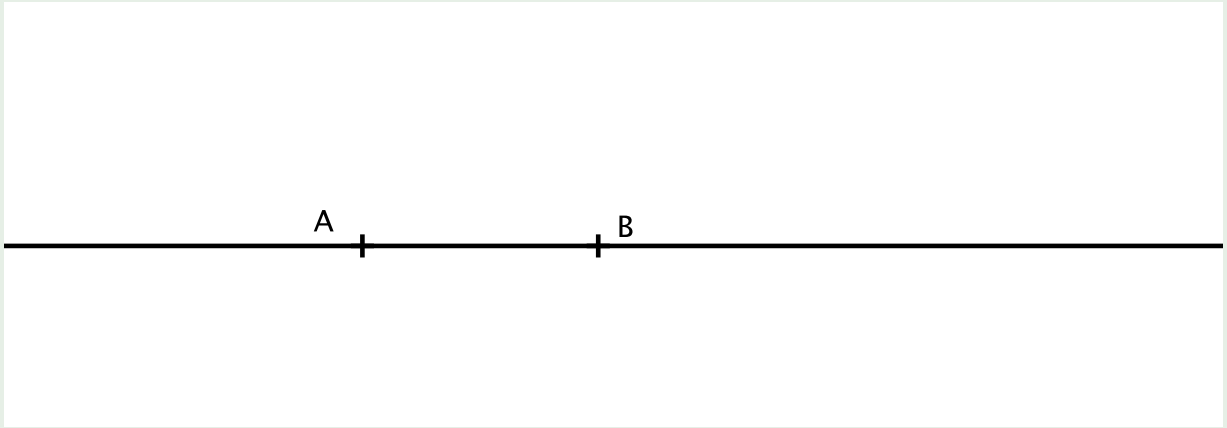

$$(AB; CD) = -\frac{7}{8}$$

# Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

**Definice (Harmonická čtveřice)**

Uspořádanou čtveřici bodů, pro které platí $(AB; CD) = -1$ nazýváme *harmonická čtveřice (čtveřina) bodů*.

**Konstrukce (Dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ (s použitím rovnoběžnosti))**

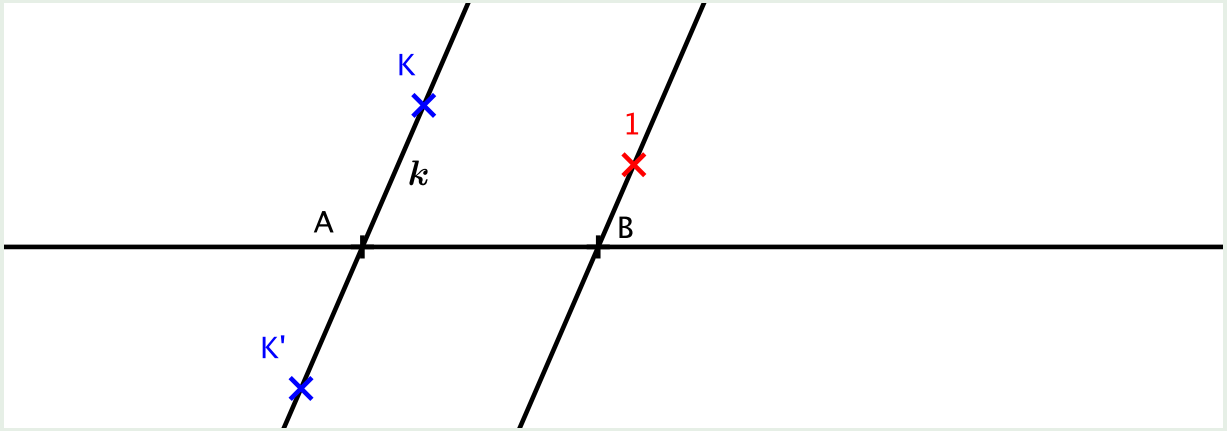


# Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

## Definice (Harmonická čtveřice)

Uspořádanou čtveřici bodů, pro které platí $(AB; CD) = -1$ nazýváme *harmonická čtveřice (čtveřina) bodů*.

## Konstrukce (Dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ (s použitím rovnoběžnosti))

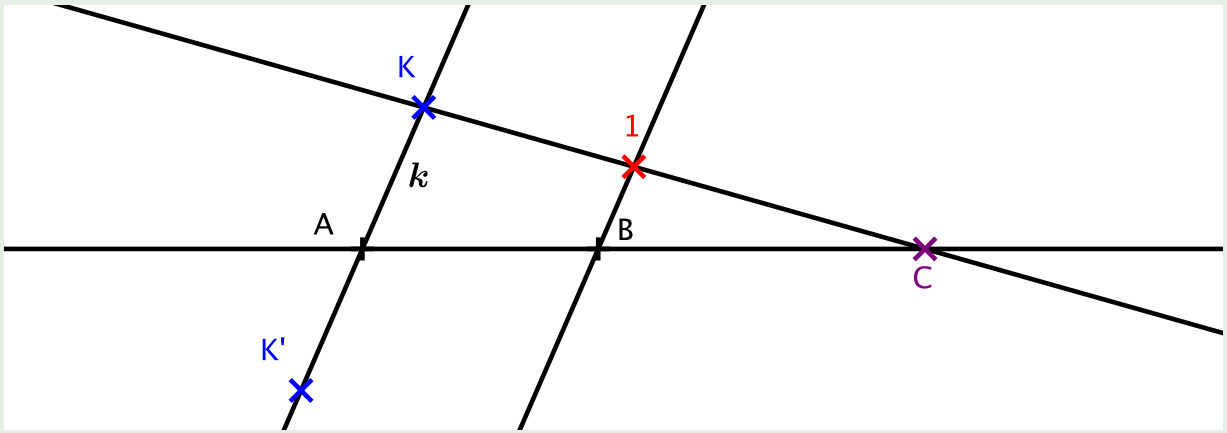


# Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

**Definice (Harmonická čtveřice)**

Uspořádanou čtveřici bodů, pro které platí $(AB; CD) = -1$ nazýváme *harmonická čtveřice (čtveřina) bodů*.

**Konstrukce (Dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ (s použitím rovnoběžnosti))**

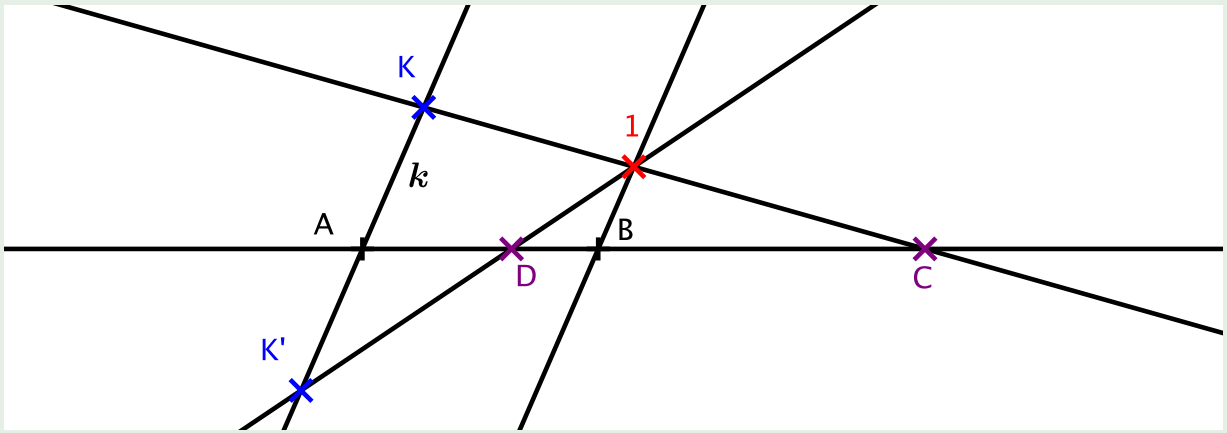


# Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

## Definice (Harmonická čtveřice)

Uspořádanou čtveřici bodů, pro které platí $(AB; CD) = -1$ nazýváme *harmonická čtveřice (čtveřina) bodů*.

## Konstrukce (Dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ (s použitím rovnoběžnosti))

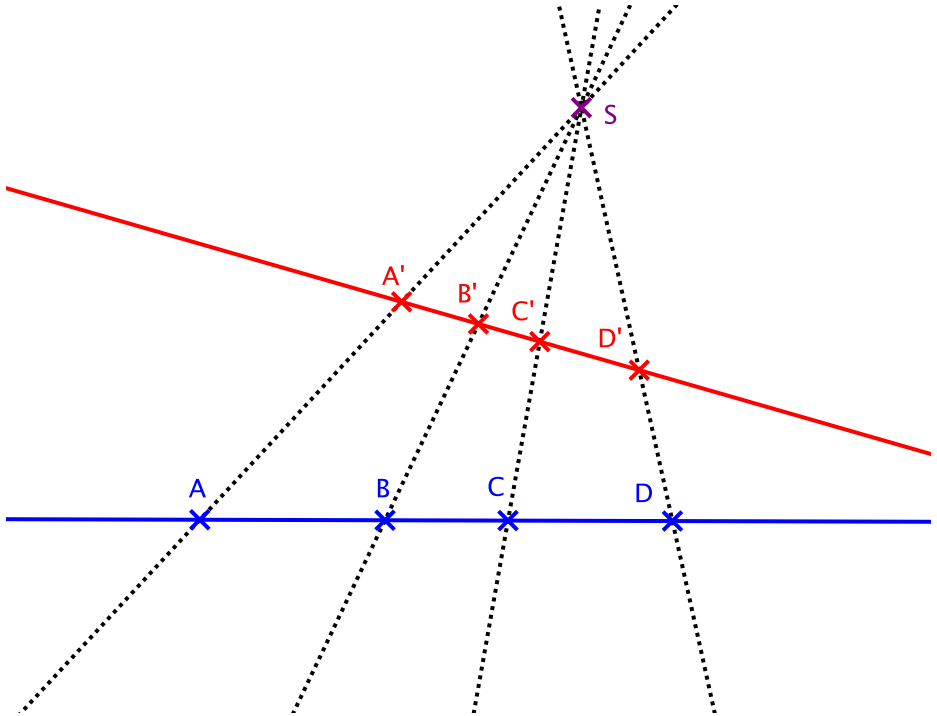


# Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

**Věta**

*Při kolineaci sa zachovává dvojpoměr.*

$$(AB;CD) = \frac{(AB;C)}{(AB;D)} = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{B'D'}}{\overrightarrow{B'C'}\cdot\overrightarrow{A'D'}} = \frac{(A'B';C')}{(A'B';D')} = (A'B';C'D')$$



# Vlastnosti kolineace

**Věta (Vlastnosti kolineace)**

*Kolineace*

1. *zachovává incidenci.*
2. *zachovává dvojpoměr.*
3. *NEzachovává středy úseček (a dělicí poměr).*
4. *NEzachovává velikosti úhlů.*
5. *NEzachovává délky úseček (a obsahy).*

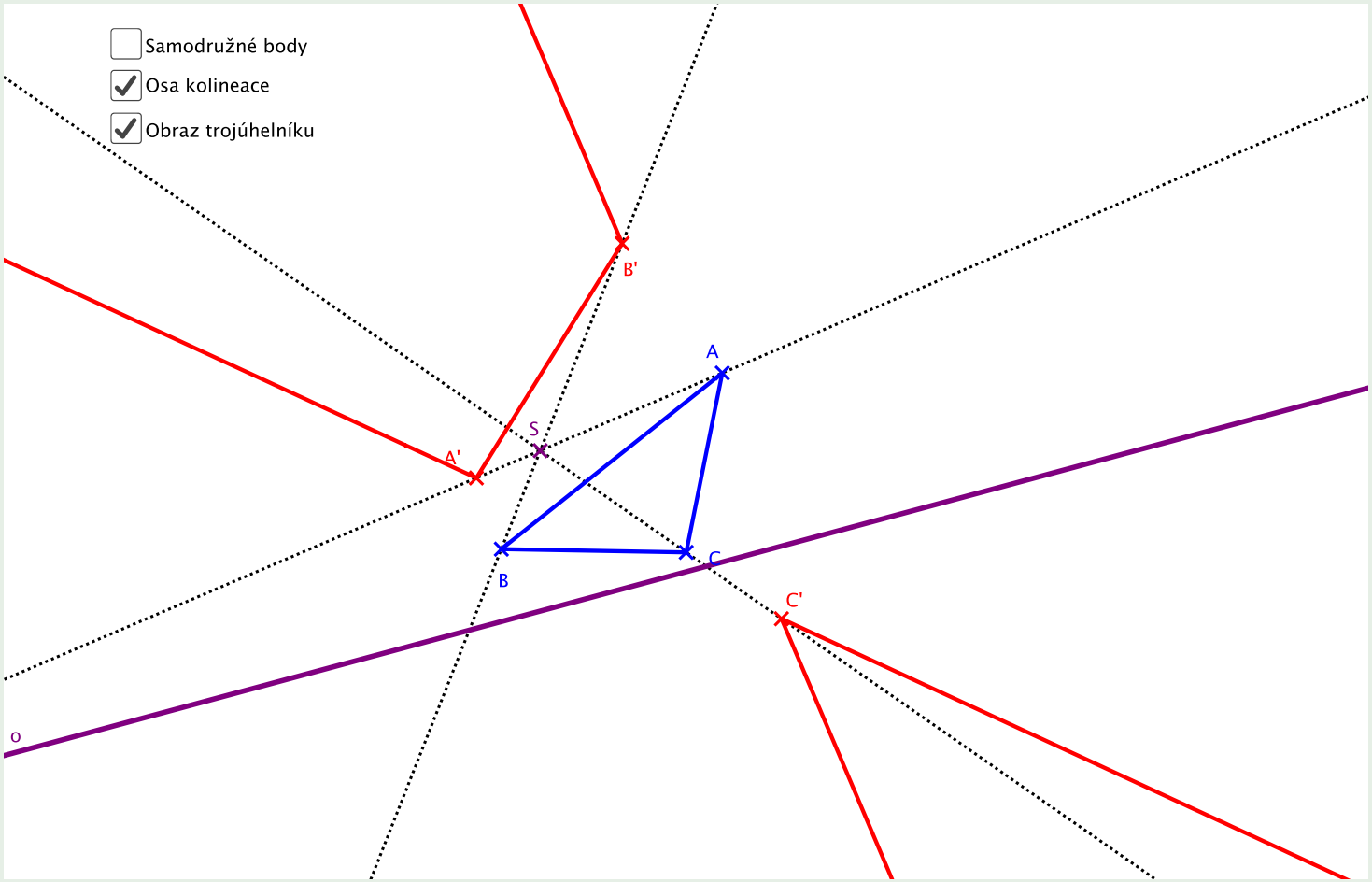
Dvojpoměr je *invariant* při kolineaci.

# Trojúhelník $\triangle$

**Definice ($\triangle$)**

*Trojúhelník* je průnik tří polorovin určených třemi nekolineárními body $A, B, C$ tak, že ke každým dvoum bodům vybíráme polorovinu, do které náleží třetí bod.
Body $A, B, C$ nazýváme *vrcholy* $\triangle$.
Úsečky $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ nazýváme *strany* $\triangle$.

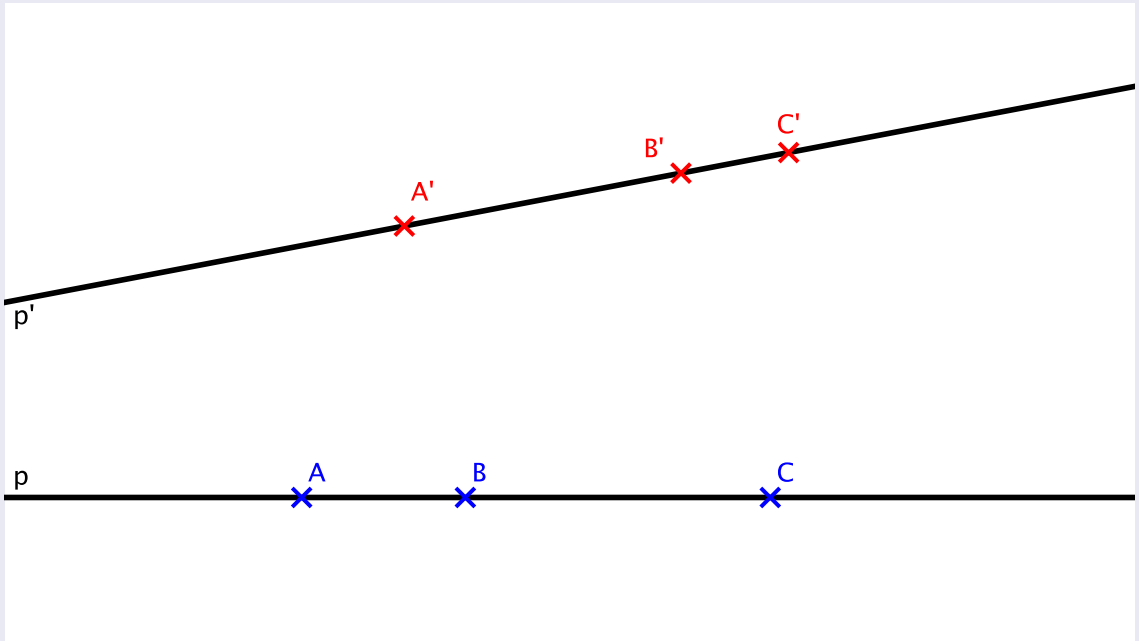
# Příklad


Samodružné body
Osa kolineace
Obraz trojúhelníku
B'
A
S
A'
B
C
C'
o

# Pappova věta

## Věta (Pappova)

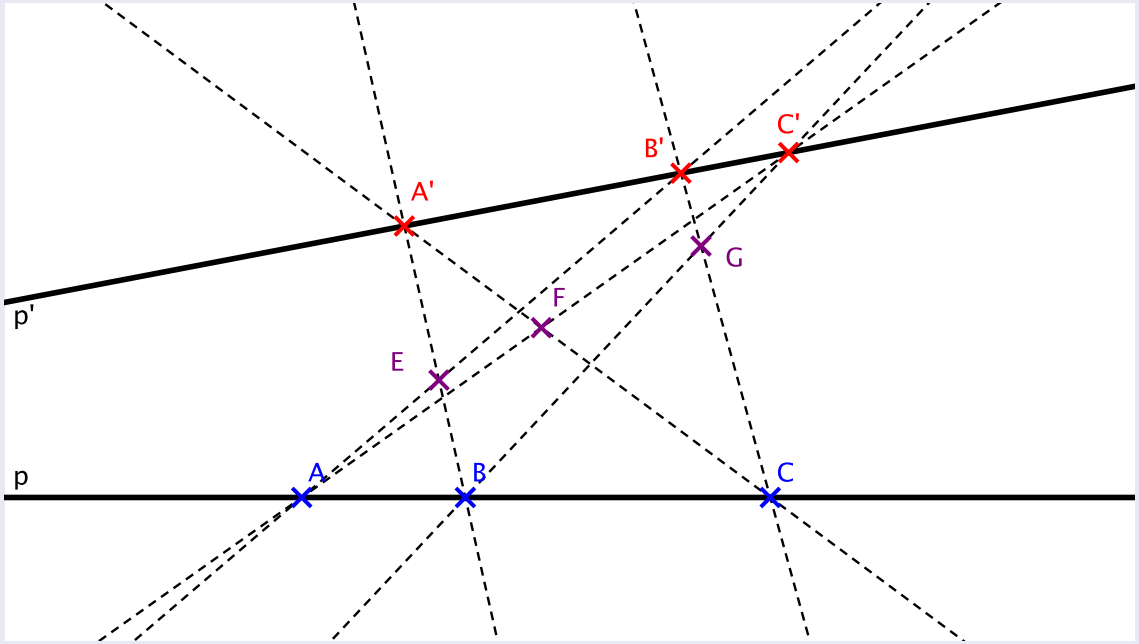
*Nechť $A, B, C$ jsou tři body na přímce $p$ a $A', B', C'$ jsou tři body na přímce $p'$, potom jestli existují průsečíky $AB' \cap BA', AC' \cap CA', BC' \cap CB'$, tak jsou taky kolineární.*



# Pappova věta

## Věta (Pappova)

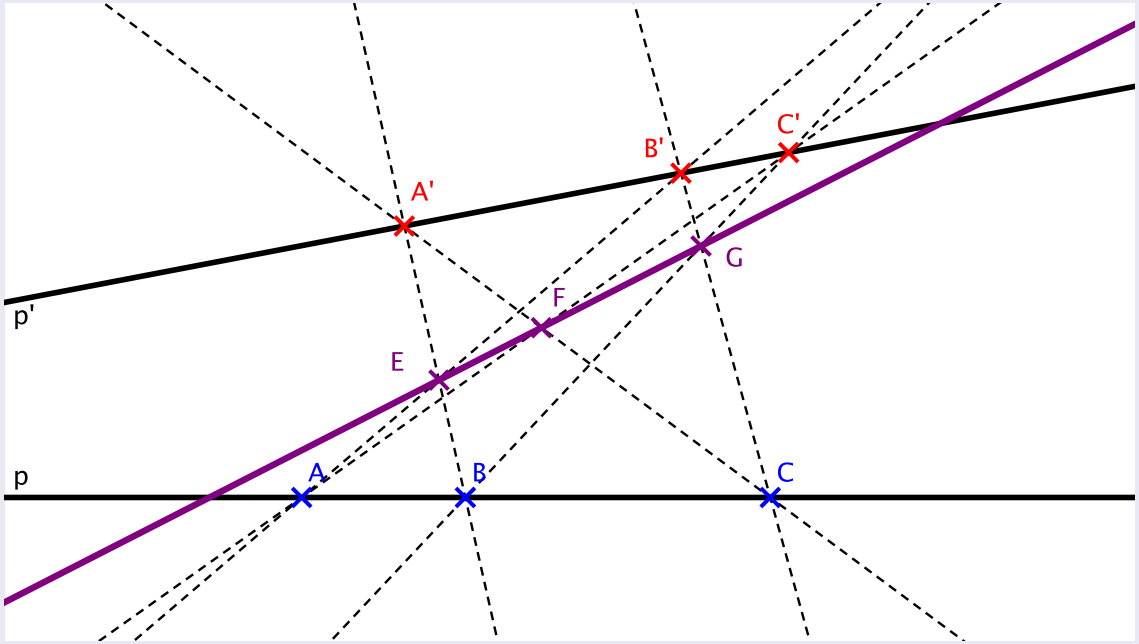
*Nechť $A, B, C$ jsou tři body na přímce $p$ a $A', B', C'$ jsou tři body na přímce $p'$, potom jestli existují průsečíky $AB' \cap BA'$, $AC' \cap CA'$, $BC' \cap CB'$, tak jsou taky kolineární.*



# Pappova věta

## Věta (Pappova)

*Nechť $A, B, C$ jsou tři body na přímce $p$ a $A', B', C'$ jsou tři body na přímce $p'$, potom jestli existují průsečíky $AB' \cap BA', AC' \cap CA', BC' \cap CB'$, tak jsou taky kolineární.*



# Desarguesova věta

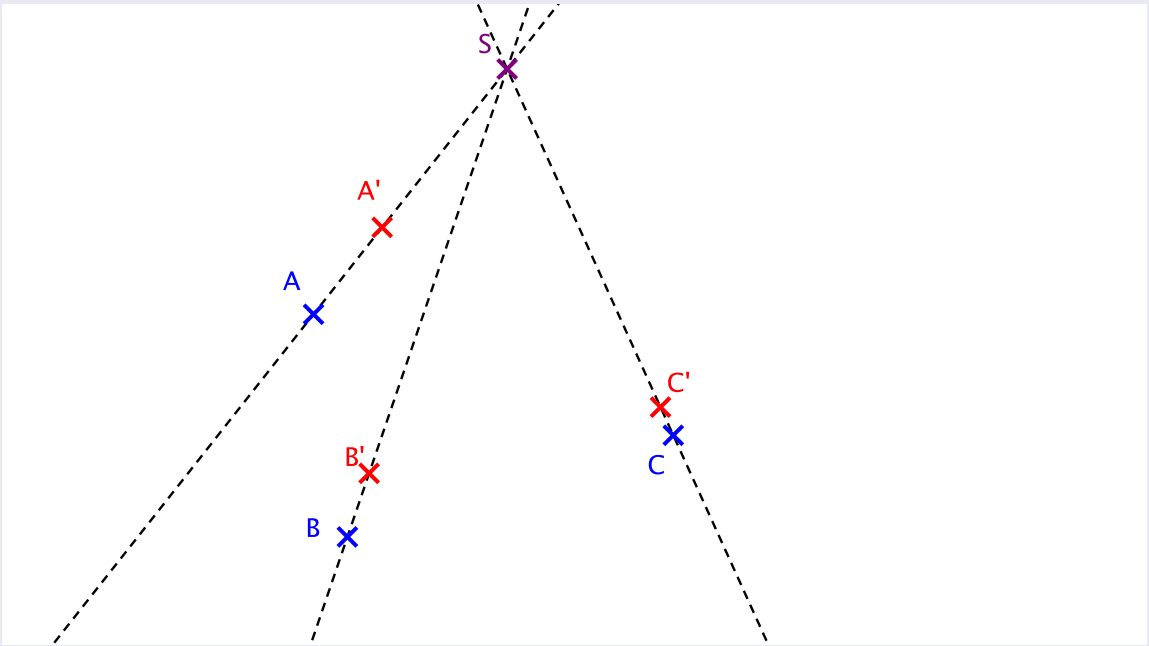
Girard Desargues (1591-1661)



# Desarguesova věta

## Věta (Desarguesova)

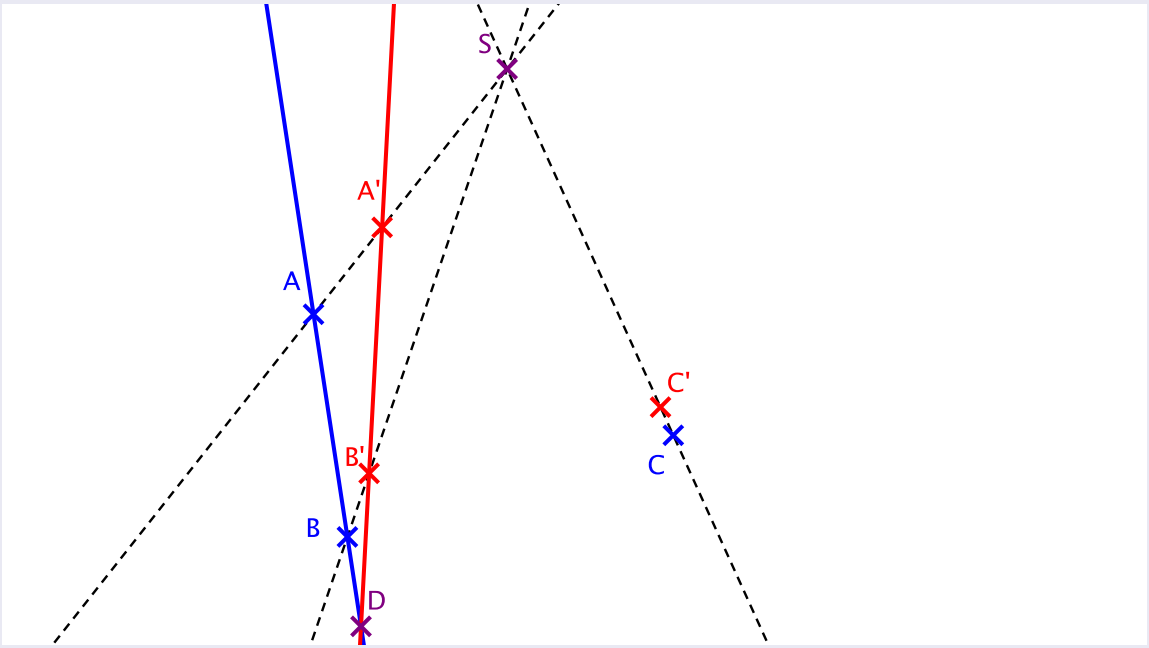
*Nechť $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky $AB \cap A'B', AC \cap A'C', BC \cap B'C'$, tak jsou kolineární.*



# Desarguesova věta

## Věta (Desarguesova)

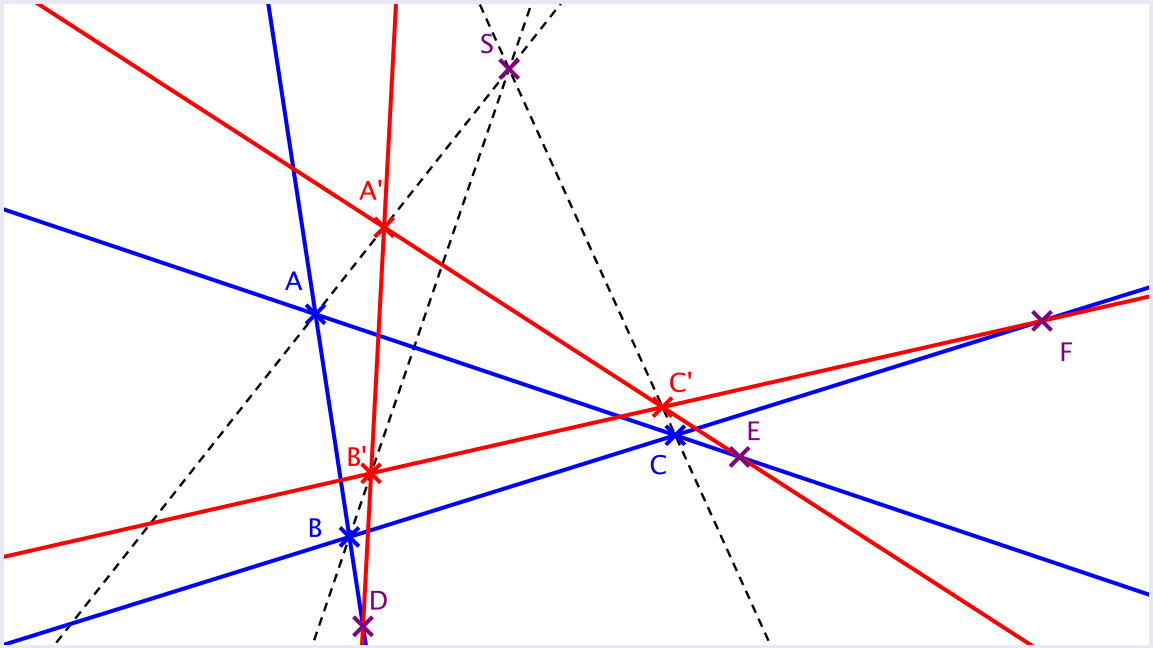
*Nechť $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky $AB \cap A'B', AC \cap A'C', BC \cap B'C'$, tak jsou kolineární.*



# Desarguesova věta

## Věta (Desarguesova)

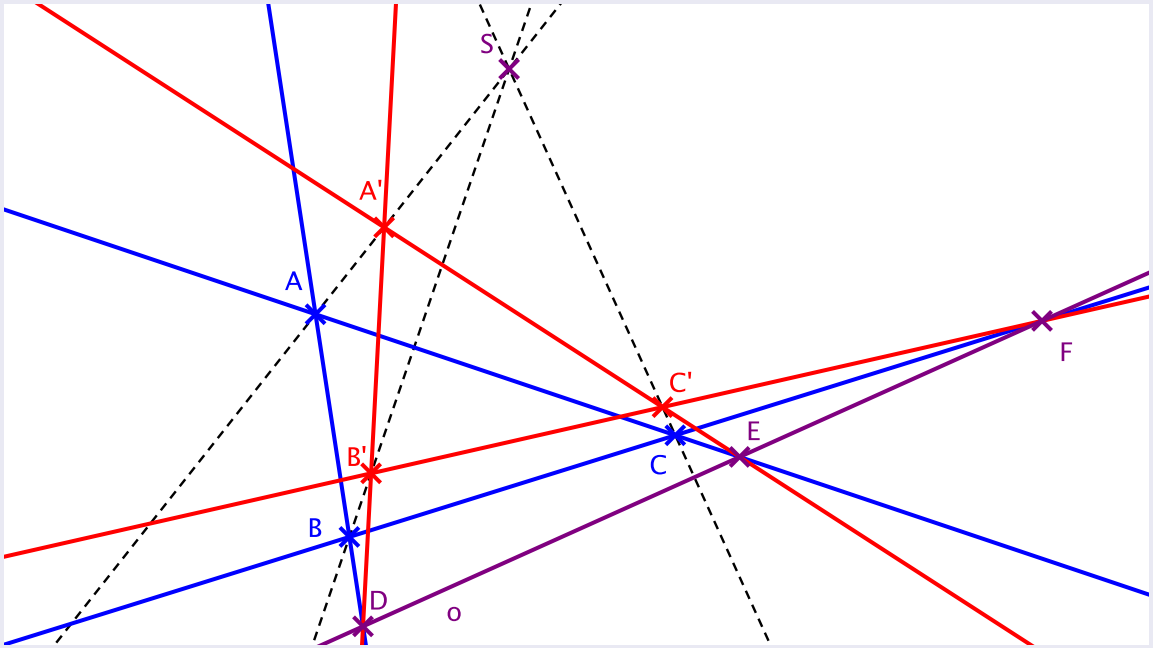
*Nechť* $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ *jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky* $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, $BC \cap B'C'$, *tak jsou kolineární.*



# Desarguesova věta

## Věta (Desarguesova)

*Nechť* $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ *jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky* $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, $BC \cap B'C'$, *tak jsou kolineární.*



# Desarguesova věta

## Věta (Desarguesova)

*Nechť $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky $AB \cap A'B', AC \cap A'C', BC \cap B'C'$, tak jsou kolineární.*

