Planimetrie

Geometrie a Konstrukční úlohy

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2026

www.zamboj.com

Geometrie

- **Geometrie:** studium útvarů.
  - útvary: abstraktní (matematické) i empirické
  - studium: popis (definice), vlastnosti (věty a důkazy), vzájemné vztahy, zobrazení
- **Reprezentace v geometrii:**
  - Syntetická geometrie: sestrojování objektů, využití vzájemných vztahů, obyčejně s vizualizací a bez užití souřadnic (předměty Planimetrie a Stereometrie)
  - Analytická geometrie: užití souřadnic (nebo jiné symbolické reprezentace), popis a argumentace pomocí pravidel algebry a matematické analýzy (předměty Lineární algebra a geometrie 1, 2 a další)
  - Obecné pravidlo: při řešení úloh se snažíme vhodně používat všechny dostupné metody a reprezentace, mnohdy se doplňují
- **Podle dimenze:**
  - Planimetrie - studium rovinných útvarů
  - Stereometrie - studium prostorových útvarů

Trojúhelníky jsou k ničemu!

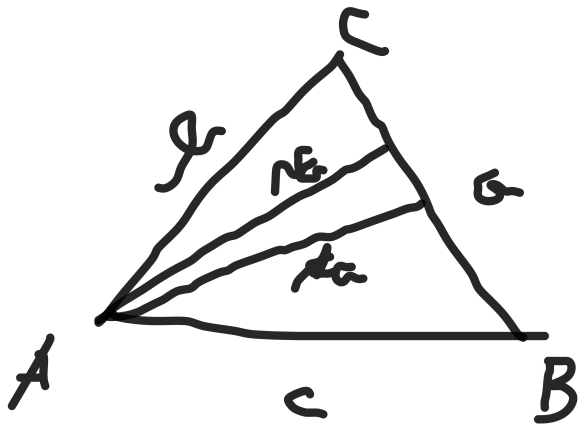


KDYBY ČIROU NÁHODOU K NĚČEMU BYLY, TAK K ČEMU? ... ale v dnešní době!

Konstrukční úloha

- Úloha, jejíž výsledkem je zkonstruovat/ sestrojit geometrický útvar ze zadaných prvků a se zadanými nástroji (pravítko, kružítko apod.)
- (Didaktickým) cílem konstrukčních úloh je naučit se **metodam řešení**, **analyzovat** vyřešenou situaci, sestavit plán/ **postup** ze zadaných prvků a s pomocí zadaných nástrojů, **argumentovat** podmínky existence a jednoznačnosti, resp. počtu řešení, . . . rýsovat.
- Aplikace konstrukčních úloh - v menší míře v praktických činnostech, stavebnictví, malířství, zobrazování, architektuře . . . . V širším smyslu - dokazování matematických vět, řešení problémů, konstrukce algoritmů, vhled do hlubších vlastností geometrických útvarů.
- Historický kontext - od počátku axiomatické metody (struktury matematických teorií), Eukleidés: Základy (cca 3. st. p. n. l.).

Sestrojte $\triangle ABC$ jsou-li dány a, t_a, v_a



Postup

1) $\overline{BC}; |BC| = a$
2) $S_{BC}; |BS_{BC}| = |CS_{BC}|$
3) $k; k(S_{BC}, t_c)$
4) $p; p \| \overline{BC}, |p, \overline{BC}| = v_a$
5) $A; A = k \cap p$

... Následuje precizní konstrukce...

Důkaz: důkaz konstrukce byl proveden zpětným průběhem konstrukce

Závěr: Úloha má 2 řešení v dané polorovině.

Co je zde špatně?

V ČEM SE LIŠÍ TYTO ÚLOHY?

Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány: .

a) Délky strany $a = 8$, těžnice $t_a = 5$, výšky $v_a = 4$.
b) Délky strany a, těžnice t_a, výšky v_a.
c) Výška v_a délky 4 svojí polohou v rovině. Délky strany $a = 8$ a těžnice $t_a = 5$.
d) Vrcholy B, C v rovině, kde $B \neq C$, a délky těžnice t_a a výšky v_a.

Formální struktura řešení konstrukčních úloh

- zadání
- náčrt a rozbor (analýza)
- postup konstrukce a konstrukce
- důkaz konstrukce, resp. zkouška (lze zahrnout do rozboru, nebo diskuze)
- diskuze řešitelnosti a počtu řešení, závěr

Formální struktura řešení konstrukčních úloh

- zadání
- náčrt a rozbor (analýza) — heuristická fáze
- postup konstrukce a konstrukce
- důkaz konstrukce, resp. zkouška (lze zahrnout do rozboru, nebo diskuze)
- diskuze řešitelnosti a počtu řešení, závěr

Formální struktura řešení konstrukčních úloh

- zadání
- náčrt a rozbor (analýza) — heuristická fáze
- postup konstrukce a konstrukce — algoritmická fáze
- důkaz konstrukce, resp. zkouška (lze zahrnout do rozboru, nebo diskuze)
- diskuze řešitelnosti a počtu řešení, závěr

Formální struktura řešení konstrukčních úloh

- zadání
- náčrt a rozbor (analýza) — heuristická fáze
- postup konstrukce a konstrukce — algoritmická fáze
- důkaz konstrukce, resp. zkouška (lze zahrnout do rozboru, nebo diskuze)
- diskuze řešitelnosti a počtu řešení, závěr — argumentační fáze

Formální struktura řešení konstrukčních úloh

- zadání $\rightarrow$ náčrt: načrtnutí výsledku(ů) a vztahů
- náčrt $\rightarrow$ rozbor vyřešené situace a všech vztahů (i zdánlivě nepotřebných)
- rozbor $\rightarrow$ slití vztahů do kroků postupu konstrukce a konstrukce
- postup konstrukce + konstrukce $\rightarrow$ v každém kroku ověření existence a počtu možností
- diskuze $\rightarrow$ vyhodnocení

0. Zadání

Podle zadání dělíme konstrukční úlohy na:

- Podle polohy:
  - polohové (např. „Je dána přímka, bod . . . “) — Je známá poloha alespoň jednoho prvku. Výsledek je závislý na poloze.
  - nepolohové (např. „Sestrojte útvar, t.ž. délka, tvar “) — Jsou známé jenom vlastnosti útvaru, ale není známá poloha žádného! prvku. Výsledek nezávisí na poloze (a orientaci).
- Podle zadaných hodnot
  - s konkrétními hodnotami
  - s parametrem
- Podle způsobu zadání, například obrázkem apod.

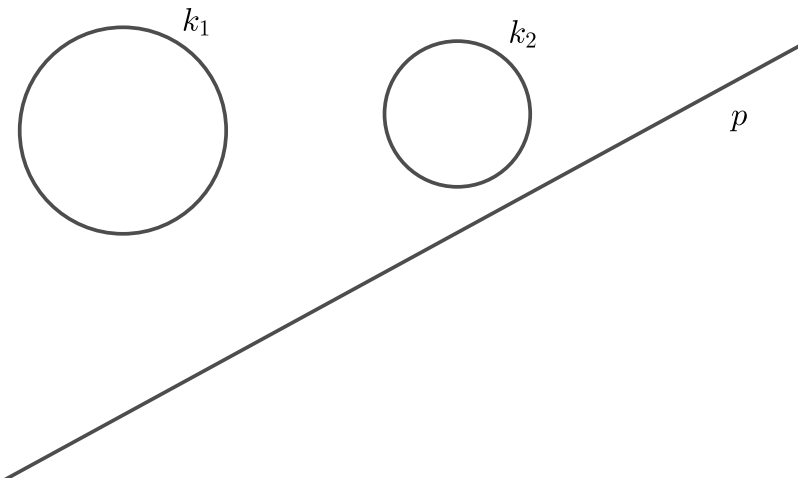
Poznámky

- Rozbor a postup: U polohové úlohy musíme vždy začít zadaným prvkem. U parametrických úloh konstruujeme jedno co „nejobecnější“ řešení (pokud není uvedeno jinak).
- Diskuze: V nepolohové úloze jsou shodná řešení počítána pouze jednou (formalismus „až na shodnost“). V polohové úloze jsou výsledkem všechny sestrojitelné možnosti (počet řešení v diskuzi).

0. Zadání

- Příklad zadání obrázkem (polohová úloha):

  V rovině je dána přímka p a kružnice k_1, k_2 podle obrázku. Sestrojte rovnostranný trojúhelník jehož vrcholy leží na zadaných útvarech (p, k_1, k_2) a současně platí, že žádné dva vrcholy neleží na jednom z daných útvarů.



1. Náčrt

- Náčrt — načrtneme vyřešenenou situaci, náčrtky můžou dynamicky přibývat v průběhu řešení (je to metoda řešení)
- Je-li nám postup jasný, tak napíšeme hlavní myšlenku řešení (např. využijeme vlastnosti rovnostranného trojúhelníku ... , Thalétovou kružnici nad ... , ekvigonálu nad úsečkou. . . , stejnolehlost se středem v bodě X a koeficientem κ . . . , doplníme na rovnoběžník . . .).

1. Náčrt

Běžná chyba — náčrt je jen jeden

- načrtnutí pouze speciálního případu
- nevyznačení vztahů

Důsledek: neuvědomění si obecných vztahů, vnesení chybných předpokladů. (Příklad: a, c, v_c a tupoúhlý trojúhelník)
Doporučení: kreslit víc náčrtů, posloupnost náčrtků může vést k pochopení základních vztahů řešení (metoda řešení), vyznačovat vztahy mezi zadáním a řešením, hledat kritické možnosti.

1. Rozbor

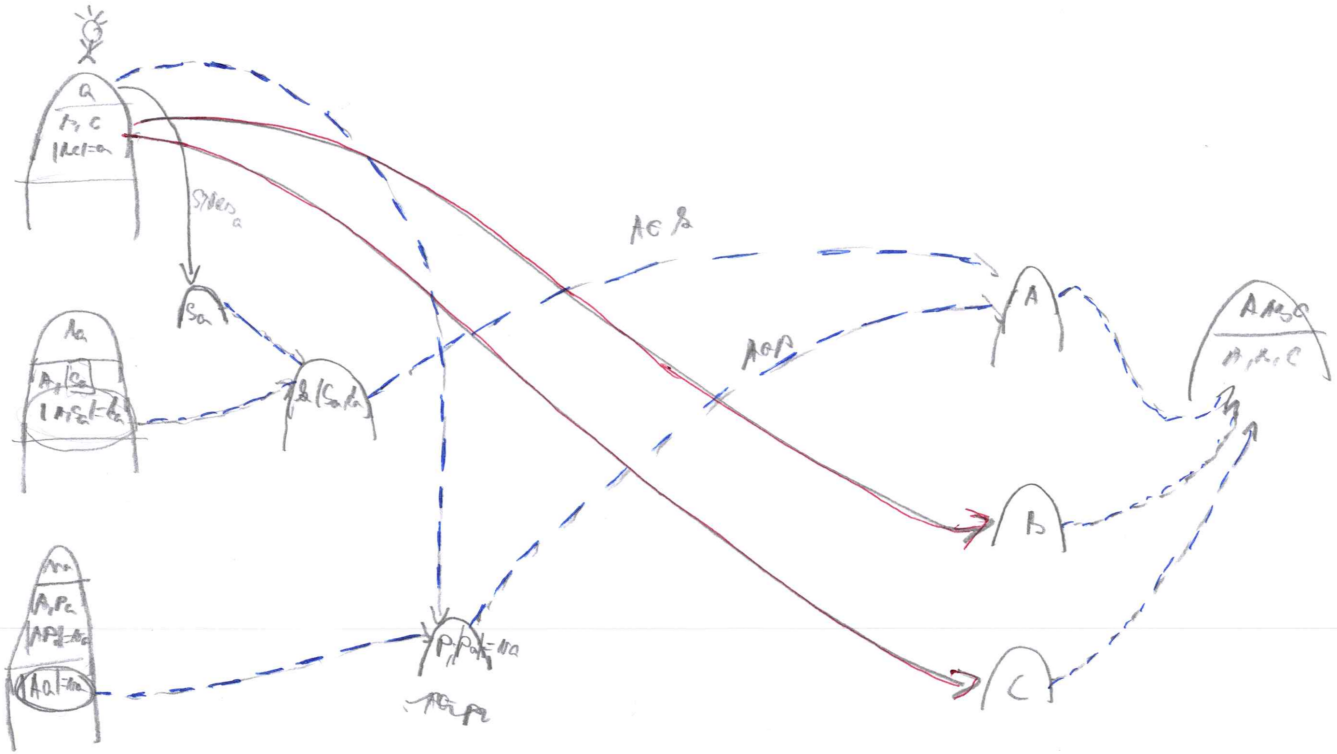
- Když nevíme, analyzujeme vyřešenou situaci — vypíšeme všechny definice a vlastnosti zadaných a hledených prvků a všechna tvrzení, ve kterých se tyto prvky vyskytují (např. je-li v zadání ortocentrum, tak se zaměříme na výšky, kolmost, pravoúhlé trojúhelníky a věty o nich).
- Zaměříme se na:
  - **vztahy mezi zadanými a hledanými prvky**
  - **množiny bodů**, na kterých leží výsledné prvky (např. kružnice, přímky, rovnoběžky, ekvidistanta . . .)
  - **zobrazení, která zachovávají vlastnosti** útvarů ze zadání (např. rovnostranný trojúhelník a otočení, rovnoběžník a středová souměrnost, tečna kružnice a stejnolehlost / posunutí . . .)
  - **přeformulování** / **přenesení** úlohy (např. kruhovou inverzí, dilatací) a zpětné vrácení
  - použití **výpočtu a analytických metod**

1. Rozbor

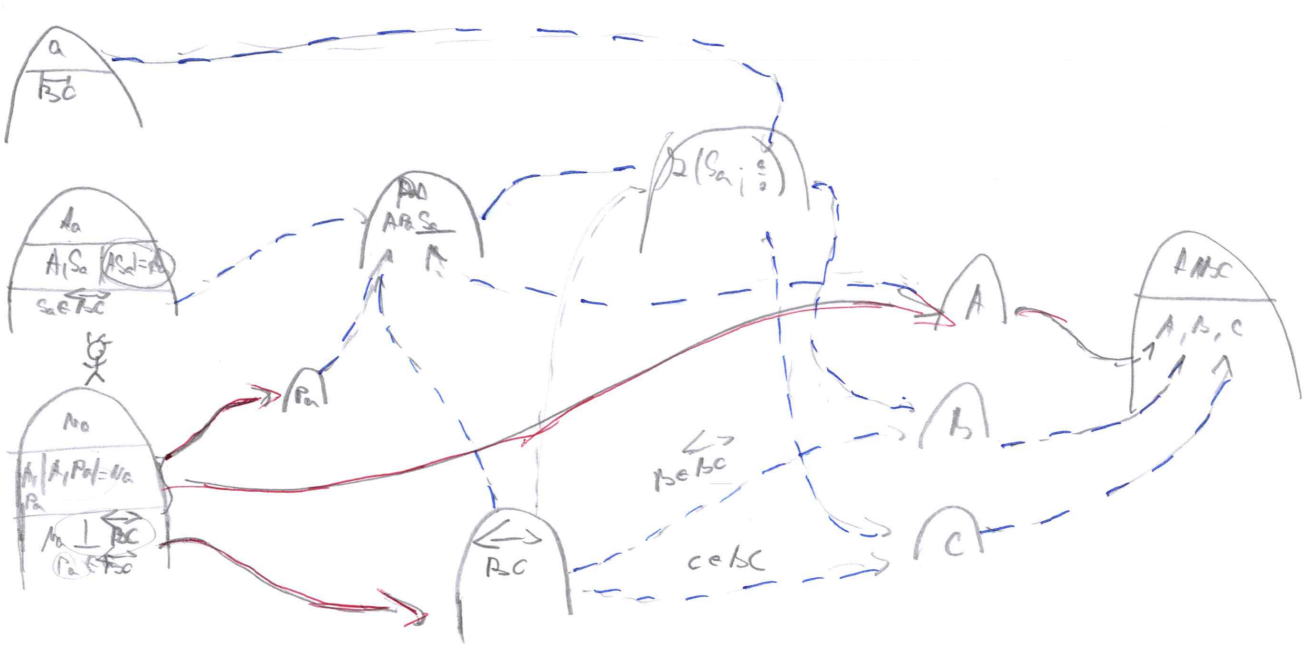
HLEDÁNÍ CESTY MEZI PŘEDPOKLADY A ÚTVAREM K SESTROJENÍ.



1. Rozbor

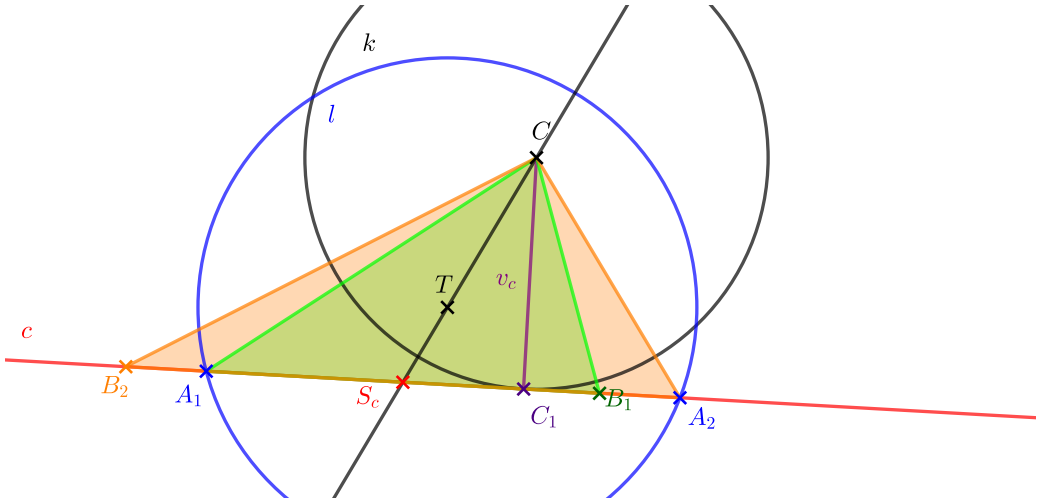


1. Rozbor

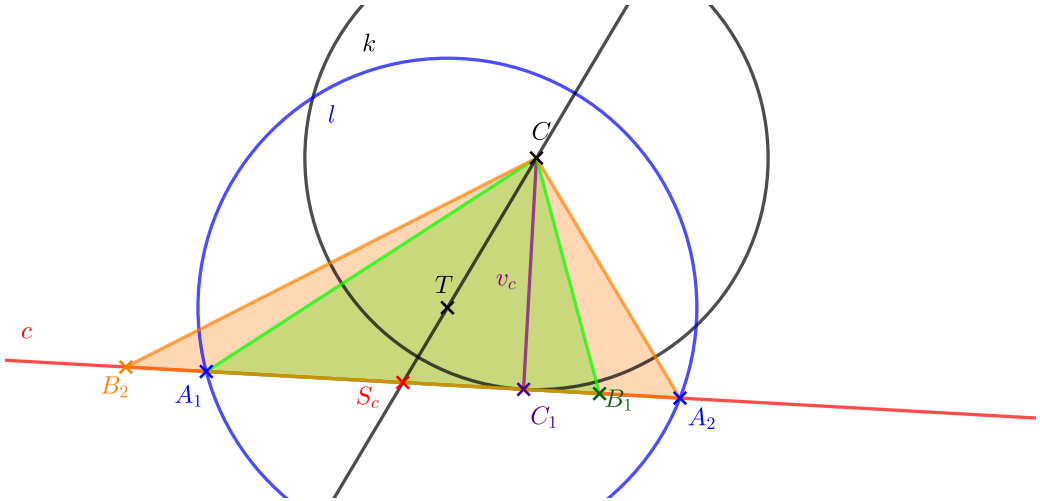


Zadání: V rovině jsou dány dva různé body C a T svojí polohou. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ je-li dána délka výšky v_c a délka těžnice t_a tak, aby bod T byl těžištěm trojúhelníku. Proveďte náčrt a rozbor, postup konstrukce a konstrukci, diskuzi existence a počtu řešení.

konstrukce pro ilustraci / toto není původní náčrt



konstrukce pro ilustraci / toto není původní náčrt



Rozbor:
Úloha je polohová, tím, že máme C a T můžeme díky vlastnostem těžiště sestrojit i těžnici t_c a střed S_c. Budeme hledat jeden z bodů A, B, druhý bude souměrný dle S_c. Protože máme délku těžnice t_a, tak víc informací máme o vrcholu A, který bude na kružnici l se středem v těžišti o poloměru délky $\frac{2}{3}t_a$. Bod A musí navíc ležet na straně c. Na přímce, ve které se nachází strana c už máme bod S_c, využijeme výšku v_c, která je k ní kolmá, takže sestrojujeme tečny z bodu S_c ke kružnici $k(C, v_c)$. Vrchol A leží na průniku tečny a kružnice k. Vrchol B je středově souměrný s A přes S_c.

- rozbor není, úloha je triviální
- rozbor není, úloha je těžká
- náčrt je rozbor

Tautologie: Náčrt není rozbor. Rozbor je rozbor.
Důsledek: když se nenaučíme psát rozbory u jednoduchých úloh, nedokážeme začít řešit složitější úlohy.
Doporučení: psát hlavní myšlenky, hledat vztahy mezi zadáním a řešením, identifikovat různé možnosti začátku.

1. Náčrt a rozbor

- V rozboru se úloha vyřeší, v postupu už jen shrne.
- Je vhodné se rovnou zamyslet (a zapsat) předpokládaný počet řešení, či další úvahy o sestrojitelnosti.

2. Postup konstrukce a konstrukce

- Soupis (všech) konstrukčních kroků a jejich provedení.
- Slovně nebo symbolicky (na základě domluvených pravidel). Postup je vhodné číslovat, hodí se nám to do diskuze.
- Triviální konstrukce (které už známe z předešlých úloh) můžeme zkrátit. Např. sestrojíme střed úsečky, bez toho abychom to rozepisovali (pozor, při výuce! všem žákům musí být jasné, jak se to provede a zapíše).

2. Postup konstrukce a konstrukce

- Sestrojujeme co nejobecnější situaci (nevolíme speciální parametry, kolmost úhlu, rovnoběžnost apod.). Obyčejně stačí sestrojit jedno řešení. Někdy se vyžaduje narýsovat i další řešení (explicitně v zadání).

2. Postup konstrukce a konstrukce

Běžná chyba — postup konstrukce je rozbor

- místo rozboru napíšeme postup konstrukce (slovně)
- obyčejně u jednoduchých úloh

Tautologie: Postup není rozbor. Rozbor je rozbor.
Důsledek: stejný jako předtím a navíc i ztráta času dvojím psaním postupu.
Doporučení: stejně jako předtím.

2. Postup konstrukce a konstrukce

Běžná chyba — konstrukce a pak postup

- nejdřív konstrukce (když už máme v ruce pravítko)
- zpětné doplnění postupu
- obyčejně u jednoduchých úloh

Důsledek: přeskakování kroků, chybějící útvary, zapomenutí posledního kroku.

Doporučení: postup $\rightarrow$ konstrukce, nebo dělat současně (krok po kroku).

2. Postup konstrukce a konstrukce

Běžná chyba — sice je dáno c polohou ale začneme radši t_a

- nepochopení stanovení polohové úlohy

Důsledek: řeší se jiná úloha.

Doporučení: zadání s různými začátky.

- sestrojíme polopřímku (např. v $\triangle a, b, v_c$), polokružnici, osu „správného“ úhlu, poloekvidistantu
- chybí poslední krok ($\triangle ABC$)

Důsledek: ztráta řešení. I když jsou všechny předchozí útvary sestrojitelné, nemusí být naplněny předpoklady pro konstrukci výsledného útvaru.

Doporučení: obyčejně není důvod sestrojovat části množin. Když ten důvod je, tak ho je potřeba zdůvodnit. Kontrolovat předpoklady / definice konstruovaných útvarů.

2. Postup konstrukce a konstrukce

a, b, α

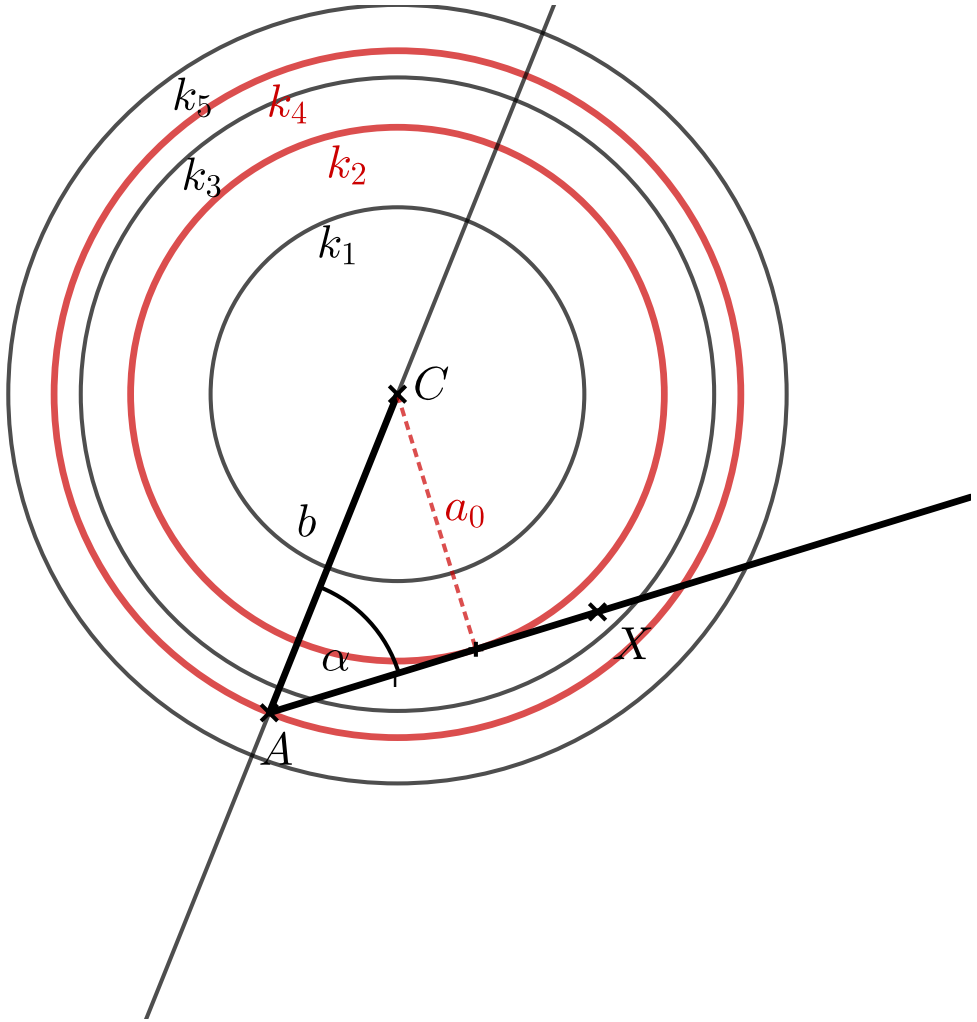
Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.

1) $C, A; |CA| = b$
2) $\overrightarrow{AX}; |\sphericalangle CAX| = \alpha$
3) $k; k(C, a)$
4) $B; B \in \overrightarrow{AX} \cap k$
5) $\triangle ABC$

3. Diskuze existence a počtu řešení

a, b, α

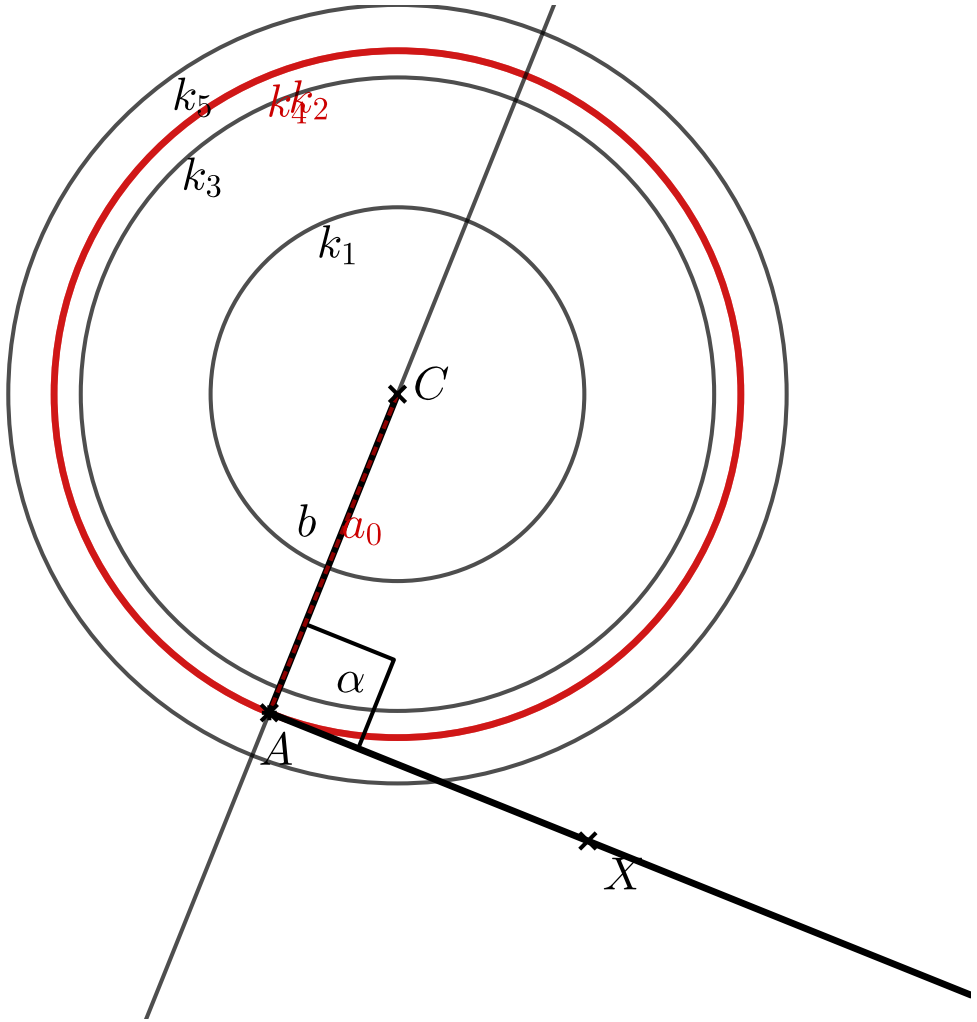
Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.



3. Diskuze existence a počtu řešení

a, b, α

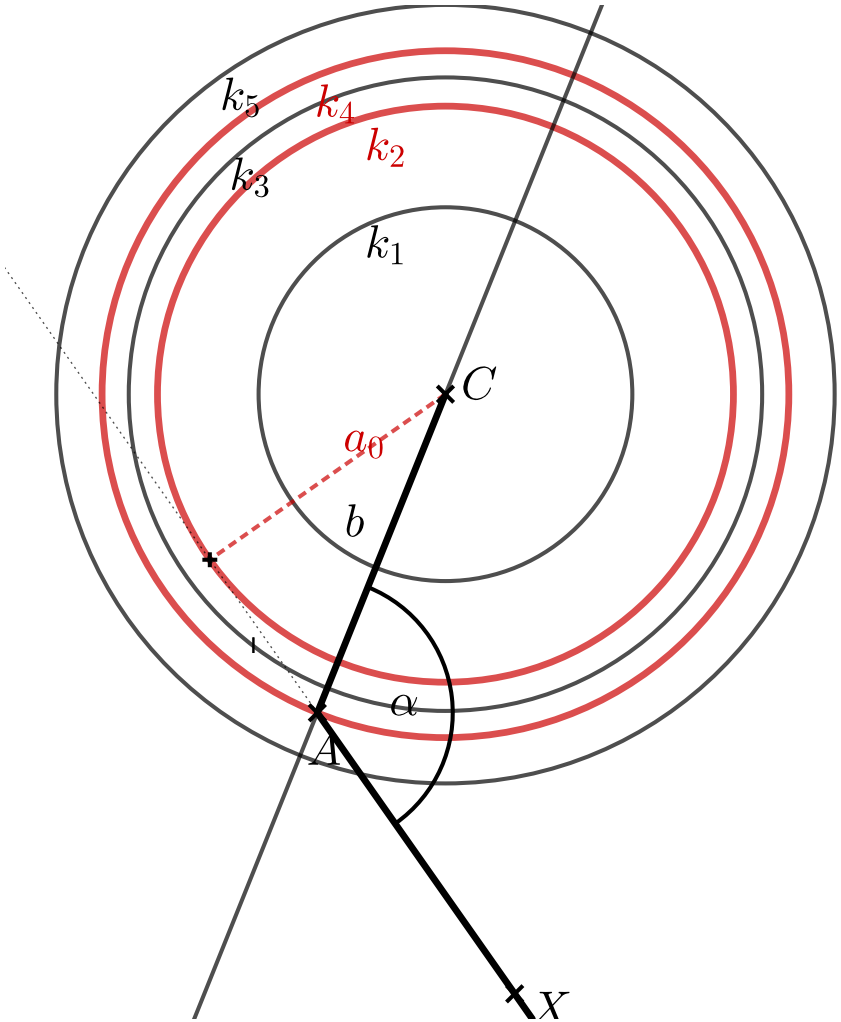
Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.



3. Diskuze existence a počtu řešení

a, b, α

Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.



3. Diskuze existence a počtu řešení

- Argumentační části úlohy. Vychází z postupu konstrukce.

  Ověření a diskuze existence řešení:
- Je možné, že některé z prvků v konstrukci nebylo možné sestrojit. Je potřeba provést diskuzi existence řešení.
- Navíc je možné, že sice jsme sestrojili všechny prvky, ale nesplňují vlastnosti hledaného útvaru (např. vrcholy trojúhelníku A, B, C leží v přímce).
- V jednotlivých bodech postupu vznikají nové prvky, je potřeba zajistit jejich existenci, speciálně průniků množin (průsečíků). Tím dostaneme podmínky existence řešení. Podmínky se musí opírat o zadané! prvky a musí být řádně zdůvodněné.
- V případě, že jsou zadané hodnoty nebo polohy všech prvků a žádný není proměnný, tak je samotná konstrukce důkazem existence.

3. Diskuze existence a počtu řešení

Ověření a diskuze počtu řešení:

- Je možné, že uvedeným postupem konstrukce jsme sestrojili i některé prvky, které nejsou správným řešením (nesplňují zadané podmínky). Ty je potřeba vyloučit (s argumentem proč nejsou řešením)
- Počty řešení se obyčejně změní při speciálních případech podmínek existence (ostrá nerovnost, rovnost apod.). Počet řešení je vždy potřebné zdůvodnit (např. kružnice v 7. kroku konstrukce se za podmínky a) protne s přímkou ve dvou, za podmínky b) v jednom, za podmínky c) v žádném bodě).
- U nepolohové úlohy nezáleží na poloze a orientaci útvarů. Víc řešení vzniká, jen když se liší jiné vlastnosti útvarů.
- Polohová úloha má tolik řešení, kolik je možných výsledných útvarů (bez ohledu na pojmenování) vzhledem k poloze zadaných prvků.

3. Diskuze existence a počtu řešení

Běžná chyba — diskutovat se dnes nebude

- dokončení konstrukce je považováno za konec úlohy

Důsledek: chybí zdůvodňovací fáze úlohy? Vzpomeňme si na cíle.

Doporučení: stanovit zadání úlohy tak, aby bylo možné diskuzi provést (parametricky, předtisk . . .). Vytvářet úlohy cílené na diskuzi.

- formalismus: Zkouška byla provedena zpětným procházením konstrukce

Důsledek: učení bezobsažných formalismů.

Doporučení: vyznačovat kritické kroky v postupu, náčrtky různých případů.

3. Diskuze existence a počtu řešení

Běžná chyba — diskuze vlastního řešení

- např. formalismus: (dáno: a, t_a, v_a) Trojúhelník lze sestrojit, protože platí trojůhelníková nerovnost
- podmínky nejsou stanoveny pro zadané útvary / parametry

Důsledek: různé podmínky pro jednu úlohu ovlivněné vlastním řešením.

Doporučení: zdůvodňovat všechny podmínky pro útvary na základě postupu konstrukce až k vstupním parametrům.

3. Diskuze existence a počtu řešení

Běžná chyba — dané poloroviny

- formalismus: Úloha má 2 řešení v dané polorovině
- chybějící zdůvodňování podmínek

Důsledek: zbytečnost omezování se na poloroviny, často vede k vynechání podmnožiny řešení.

Doporučení: zdůvodňovat všechny podmínky a tvrzení.

3. Diskuze existence a počtu řešení

Běžná chyba — nejednoznačnost diskuze

- nejasnost pravidel určování existence a počtu řešení pro polohovou/nepolohovou úlohu
- nepochopení obecnosti zadání úlohy s parametry

Důsledek: obecně nemožnost určit počet řešení.
Doporučení: držet se jasných a univerzálních pravidel.
Nepolohová úloha: počet typů neshodných útvarů (bez ohledu na značení). Polohová: počet všech sestrojitelných možností vzhledem k danému prvku (bez ohledu na značení).

3. Diskuze existence a počtu řešení

Běžná chyba — tajemství konvencí

- např. přesvědčení o správné orientaci trojúhelníku

Důsledek: přidávání pravidel vede k nekonečným nesmyslným debatám a ztrátě obecnosti řešení, nepochopení definic útvarů apod..

Doporučení: dodržovat konvence, které se dají univerzálně používat. Nezavádět zbytečně další. V geometrii jsou podstatné útvary, označení má pouze zjednodušit jejich popis.

A můžeme vesele konstruovat

